

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В ОДНОМЕРНЫХ ДИСПЕРГИРУЮЩИХ СИСТЕМАХ

Книга известного индийского математика, содержащая в сжатой форме обширный материал по теории нелинейных волн. Написанная просто и доступно, она отличается методической продуманностью и может служить введением в этот предмет.

Для математиков-прикладников, механиков, физиков, аспирантов и студентов университетов.

Содержание

К русскому переводу	5
Предисловие к английскому изданию	6
Предисловие	7
1. Линейные волны	9
1.1. Введение	9
1.2. Линейное волновое уравнение: волновая терминология	9
1.3. Общее линейное уравнение; дисперсионное соотношение	12
1.4. Диспергирующие волны; групповая скорость	15
1.5. Общее решение линейного волнового уравнения	16
1.6. Распространение энергии в диспергирующей волне	20
1.7. Важное кинематическое соотношение	22
Приложение I. Метод перевала	23
2. Некоторые нелинейные уравнения эволюции (стационарное решение)	29
2.1. Введение	29
2.2. Эффект нелинейности	30
2.3. Диссипирующие волны	37
2.4. Диспергирующие волны	40
2.5. Уединенные волны: солитоны	46
2.6. Некоторые уравнения эволюции, порождающие солитоны	46
Приложение II А. Уравнения, описывающие течение газа в трубах и волны на мелкой воде переменной глубины	55
Приложение II Б. Метод сведения к эталонному уравнению	59
3. Взаимодействие солитонов	68
3.1. Введение	68
3.2. Свойства уравнения Шредингера.	68
3.3. Интегралы уравнения и связь между уравнениями КдФ и Шредингера	72
3.4. Независимость от времени спектра уравнения Шредингера, определение параметров рассеяния	73
3.5. Обратная задача рассеяния.	76
3.6. Солитонные решения уравнения КдФ	78
3.7. Взаимодействие солитонов	89
3.8. Непрерывный спектр оператора Шредингера	93
4. Общее уравнение эволюции	95

4.1. Введение	95
4.2. Определения	98
4.3. Решения типа уединенной волны общего уравнения эволюции	103
4.4. Применение общей теории к уравнению КдФ	107
4.5. Собственные скорости общего решения уравнения КдФ	111
5. Групповая скорость; нелинейные волны.	114
5.1. Введение	114
5.2. Процедура усреднения.	115
5.3. Примеры	118
5.4. Уравнение Кортевега — де Фриза	124
5.5. Групповая скорость: динамическая трактовка	130

Имя проф. П. Бхатнагара хорошо известно в научном мире. Достаточно упомянуть, что в числе трех имен оно входит в название наиболее распространенного модельного уравнения кинетической теории газов — уравнения БГК. Многие в Советском Союзе знали проф. Бхатнагара лично. Автор этих строк познакомился с ним в Москве летом 1967 года, когда Бхатнагар вместе со своим ассистентом был гостем Академии наук СССР. Нас познакомил проф. Л. Д. Кудрявцев, и несколько дней, которые мы вчетвером провели вместе, совершая короткие путешествия по Москве и ее окрестностям, оставили у нас неизгладимое впечатление. Проф. Бхатнагар соединял в себе две культуры, индийскую и европейскую, опровергая тем самым известную сентенцию Р. Киплинга: «Запад есть Запад, Восток есть Восток, не встретиться им никогда». Мы стали друзьями и продолжили научное сотрудничество после его отъезда.

Перевод двух первых глав этой книги — скромная дань нашей дружбе. Остальные главы любезно согласился перевести Н. Р. Сибгатуллин, чьи научные интересы охватывают рассматриваемые в книге вопросы. Место этой книги в теории нелинейных волн хорошо обрисовано в предисловии Дж. Лайтхилла. Можно добавить лишь, что книга отражает глубокое понимание Бхатнагаром как физической, так и математической сторон теории нелинейных волн. Несколько наших подстрочных примечаний касаются лишь дискуссионных вопросов терминологии или дают необходимые разъяснения.

П. Е. Краснушкин

Характерная черта волнового движения состоит в том, что после того, как некоторый сигнал обнаружен в одной точке пространства, через некоторое время в другой точке можно обнаружить сигнал, похожий на первый. В некоторых случаях основное различие между ними заключается в *амплитудах*, что вызывается, например, распределением волновой энергии на большую площадь или ее фокусировкой на меньшую. Однако кроме амплитудных изменений возможны различные изменения *формы* волны, и представляет большой интерес изучение механизмов, вызывающих эти изменения. Большинство таких механизмов с большим успехом можно проанализировать на одномерных системах, поскольку аналитические трудности при переходе от многомерных систем к одномерным значительно уменьшаются, в то время как основные черты явлений удается сохранить.

Такая идеализация используется в данной монографии и позволяет ознакомиться с главными механизмами, вызывающими изменение формы волны: дисперсией, диссипацией и нелинейностью, действующими по отдельности или же в различных комбинациях. Кроме того, этот анализ включает изучение таких примечательных классов волновых форм, для которых искажающие форму эффекты, порожденные *различными механизмами*, в точности компенсируют друг друга.

По своей научной квалификации проф. Бхатнагар исключительно подходит для написания такой монографии. Начав с первых ступеней знания о волновых процессах, он постепенно, через ряд более сложных волновых явлений приводит читателя в увлекательную область современной теории нелинейных волн. Эта книга является прекрасным введением в эту теорию.

Я написал эти строки незадолго до безвременной кончины проф. Бхатнагара 5 октября 1976 г., когда прикладная математика неожиданно потеряла одного из своих выдающихся представителей. После того как боль утраты немного стихла, я стал заботиться об издании последней книги Бхатнагара достаточно большим, соответствующим ее достоинствам тиражом. Я глубоко благодарен д-ру Прасаду за первоклассное редактирование книги. Математики-прикладники должны быть признательны ему за усилия, благодаря которым книга увидела свет.

Джеймс Лайтхилл

Исследовательский институт им. Мехты совместно с Индийским математическим обществом с 17 мая по 15 июня 1976 г. организовал четырехнедельный курс лекций на тему «Гиперболические системы уравнений в частных производных и нелинейные волны». Они были ориентированы на научных работников, желающих познакомиться с этой увлекательной и вместе с тем полезной областью современной науки, в которую за последние годы было вложено много творческих сил. Автор прочитал ряд лекций по некоторым аспектам нелинейных волн. В основном он сосредоточил внимание на *стационарных* решениях знаменитых уравнений Бюргерса и Кортевега — де Фриза (КдФ), на взаимодействии солитонов, на понятии групповой скорости для нелинейных диспергирующих волн и более кратко коснулся общего уравнения эволюции, частным случаем которого является уравнение КдФ. Из многих эволюционных уравнений, привлекавших внимание выдающихся ученых последние два десятилетия, мы выделили два указанных выше модельных уравнения, поскольку уравнение Бюргерса является простейшим при изучении диссипирующих волн, а уравнение КдФ — простейшая модель для диспергирующих волн. Причем последнее уравнение особенно важно благодаря существованию решений типа уединенной волны.

В этой монографии автор более или менее точно придерживается содержания указанных выше лекций. Исключение составляют приложение к гл. 1 и два приложения к гл. 2, которые были включены, чтобы по возможности освободить читателя от обращения к другим источникам.

Нелинейные волны — это быстро прогрессирующая область знания, и естественно, что прочитанные лекции остаются открытыми для развития рассмотренных в них проблем. Можно, однако, надеяться, что они помогут понять сущность основных проблем нелинейных волн и ознакомят читателя с основными методами их решения.

Автор выражает глубокую благодарность многим математикам, чьи работы обеспечили возможность создания этого курса лекций. Среди них он особенно признателен Дж. Лайтхиллу, Дж. Б. Уизему, П. Д. Лаксу, Р. М. Миуре, Дж. Грину, С. Гарднеру, М. Д. Крускалу, Т. Таниути и С. С. Вэю, выдающийся научный вклад которых лег в основу данного лекционного курса.

П. Л. Бхатнагар

Аллахабад

Сентябрь 1976

* *

*

Смерть настигла проф. Бхатнагара, когда он редактировал рукопись этой книги, внося в нее небольшие изменения и исправляя неточности. Это произошло 5 октября 1976 г., и дальнейшая работа над рукописью производилась мной, что, конечно, не могло быть выполнено столь совершенно, как это сделал бы автор.

Публикация книги стала возможной благодаря исключительному интересу к ней профессора математики Кембриджского университета Дж. Лайтхилла. Издательство Оксфордского университета (Лондон) быстро приняло решение о публикации книги, что ускорило ее выпуск. Быстрому завершению работы над рукописью способствовала энергичная помощь д-ров В. Дж. Тикекара, Ренуки Равиндрана и Сварналаты Прабху, которые, как и я, являются учениками проф. Бхатнагара.

Пхулан Прасад

Индийский институт науки
Бангалор
Август 1977

Линейные волны

1.1. Введение

В этой главе мы обсудим некоторые важные свойства *линейных* волн, описываемых линейными уравнениями и обычно называемых волнами с *малой* амплитудой, что в действительности означает волны с *бесконечно малой* амплитудой. При включении данной главы в монографию по нелинейным волнам мы преследовали три цели: (1) ввести необходимую терминологию, (2) обратить внимание на некоторые важные свойства, необходимые для понимания явлений, связанных с нелинейными волнами, которые описываются нелинейной системой гиперболических уравнений, и (3) подготовить фон, на котором можно выделить и сравнить свойства линейных и нелинейных волн.

Заметим, что в данной монографии, как правило, исследуются одномерные волны, когда в рассмотрение входят только две независимые переменные, x и t . При этом x обозначает пространственную координату, а t — время. В рамках этой простой модели удастся ввести всю «волновую» терминологию: длину волны, волновое число, период, частоту, амплитуду, фазовую и групповую скорости и т. д.

1.2. Линейное волновое уравнение: волновая терминология

Начнем со знаменитого волнового уравнения

$$\Phi_{tt} = c^2 \Phi_{xx}, \quad (1.1)$$

где Φ описывает некоторое свойство, связанное с волной, а c^2 — положительная константа. Это уравнение определяет пространственно-временную эволюцию величины Φ в однородной изотропной консервативной системе. Заметим, что и в самом общем случае мы определим *волну* как *пространственно-временную эволюцию некоторого состояния*.

Мы можем записать общее решение (1.1) в виде

$$\Phi(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct), \quad (1.2)$$

где f и g — произвольные функции. Первый член в (1.2), как известно, представляет *распространяющуюся* волну, бегущую в положительном направлении оси x с постоянной скоростью c , а второй член — *распространяющуюся* волну, бегущую с той же скоростью в отрицательном направлении оси x .

Аргумент $x - ct \equiv p_f$ волны f называется ее *фазой*. Аналогично $x + ct \equiv p_g$ называется *фазой* волны g . Очевидно, что p_f является константой в пространстве-времени, если $dp_f/dt = 0$, т. е. если $dx/dt = c$. Таким образом, наблюдатель, движущийся вместе с волной f со скоростью c , будет всегда отмечать одну и ту же фазу волны f , т. е. одно и то же состояние волнового движения, соответствующее начальному значению величины f . Аналогично наблюдатель, движущийся со скоростью $dx/dt = -c$ вместе с волной g , будет всегда регистрировать одну и ту же фазу p_g , т. е. одно и то же значение g , с которого он начал движение. Изложенное выше придает физический смысл терминам *фаза* и *скорость волны*, называемой также *фазовой скоростью*.

В периодической распространяющейся волне (скажем, когда f — периодическая функция p_f , а $g \equiv 0$) точка, в которой ϕ имеет максимум, называется *гребнем*, а точка, в которой ϕ минимальна, — *впадиной* волны.

Пользуясь терминологией гиперболических уравнений в частных производных, к которым принадлежит (1.1), мы скажем, что это уравнение обладает двумя вещественными *характеристиками* в плоскости (x, t) :

$$C^+: dx/dt = c, \quad C^-: dx/dt = -c. \quad (1.3)$$

Здесь $f = \text{const}$ вдоль первой характеристики C^+ , а $g = \text{const}$ вдоль C^- . Таким образом, уравнения $f = \text{const}$ и $g = \text{const}$ являются *условиями совместности*.

Заметим, что описываемый уравнением (1.1) факт распространения волн в двух противоположных направлениях не является неожиданным. Это уравнение инвариантно относительно преобразования

$$x \rightarrow -x, \quad t \rightarrow -t, \quad (1.4)$$

время в нем обратимо, и мы можем изучать *будущее* волны с таким же успехом, как и ее *прошлое*. В противоположность этому в гл. 2 мы рассмотрим *однонаправленные* эволюционные уравнения.

Конкретизируем теперь функции f и g , положив, например,

$$f(x - ct) = a \sin(kx - \omega t), \quad c = \omega/k, \quad g(x + ct) = 0, \quad (1.5)$$

где ω и k — постоянные. Тогда

$$\phi = a \sin(kx - \omega t) \quad (1.6)$$

представляет периодическую бегущую волну с *амплитудой* a и волновой скоростью c , определяемой равенством

$$\omega = kc, \quad \text{или} \quad c = \omega/k. \quad (1.7)$$

Выражение (1.6) является решением уравнения в частных

производных (1.1) при начальных условиях:

$$\varphi(x, 0) = a \sin(kx), \quad \varphi_t(x, 0) = -\omega a \cos(kx). \quad (1.8)$$

Для фиксированного t величина φ изменяется синусоидально по x , как показано на рис. 1.1.

Для любого момента времени t точки $x = (4n + 1)\pi/2k + ct$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, соответствуют максимальным значениям φ , т. е. гребням волны, а точки $x = 4(n + 3)\pi/2k + ct$ — минимальным значениям φ , т. е. впадинам. Термины гребень и впадина отражают геометрическую форму графика

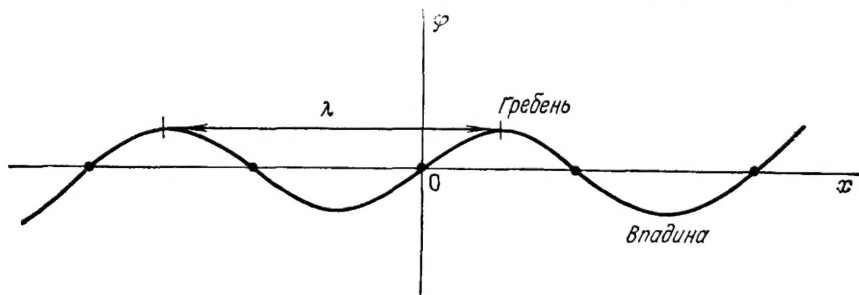


Рис. 1.1. Зависимость φ от x при фиксированном t .

функции φ (рис. 1.1). Расстояние между двумя последовательными гребнями (или впадинами) называется *длиной волны* и обозначается через λ :

$$\lambda = \{(4n + 5)(\pi/2k) + ct\} - \{(4n + 1)(\pi/2k) + ct\} = 2\pi/k. \quad (1.9)$$

Из (1.6) ясно, что k определяет число волн, укладывающихся на отрезке единичной длины (в данном случае за единицу длины принято 2π), и называется *волновым числом*. Все точки на графике функции φ в данный момент времени с разностью абсцисс, кратной λ , находятся в одинаковой фазе.

В фиксированной точке с абсциссой, равной, например, x_1 , функция φ колеблется со временем t , имея период

$$P = 2\pi/\omega. \quad (1.10)$$

Величина $\omega = 2\pi/P$ называется (угловой) *частотой* волны; она определяет число волн, прошедших через данную точку в единицу времени (здесь за единицу принято 2π). Если вместо (1.5) возьмем

$$\begin{aligned} f(x - ct) &= a \sin(kx - \omega t), \\ g(x + ct) &= a \sin(kx + \omega t), \end{aligned} \quad (1.11)$$

то

$$\varphi = 2a \cos \omega t \cdot \sin kx. \quad (1.12)$$

В этом случае мы можем изучать изменения величины φ по времени t и по пространственной координате x независимо

друг от друга. Такой выбор соответствует, очевидно, следующим начальным условиям для φ :

$$\varphi(x, 0) = 2a \sin kx, \quad \varphi_t(x, 0) = 0. \quad (1.13)$$

Точки $x = n\pi/k$, в которых *все* время $\varphi = 0$, называются *узлами* волны. Точки $x = (2n + 1)\pi/2k$, в которых φ достигает максимальных значений, называются *пучностями*. Решение (1.12) получается в результате суперпозиции двух синусоидальных бегущих волн, имеющих равные амплитуды, длины волн и частоты и распространяющихся в противоположных направлениях. Во всех точках, за исключением узлов, функция φ колеблется с периодом P , ее амплитуда в пучностях максимальна и равна $2a$, т. е. сумме амплитуд составляющих компонент — волн f и g . Поскольку при этом нет переноса энергии или количества движения между участками волны, разделенными узлами, волна, представленная выражением (1.12), называется *стоячей*. Узлы и пучности характерны для стоячей волны.

Из сказанного выше ясно, что решение уравнения (1.1) при одних условиях описывает бегущую волну, а при других — стоячую. Мы также знаем, что поперечные волны в туго натянутой струне, точки которой движутся перпендикулярно направлению распространения волны, математически описываются уравнением (1.1). Это уравнение описывает также *продольные* звуковые волны в воздухе, когда частицы воздуха колеблются относительно своего среднего положения в направлении распространения волны.

1.3. Общее линейное уравнение; дисперсионное соотношение

Указанные выше термины мы ввели с помощью уравнения частного вида, называемого стандартным линейным волновым уравнением. Рассмотрим теперь общее линейное уравнение в частных производных от двух независимых переменных x и t :

$$L[\varphi] = 0, \quad (1.14)$$

где L — линейный дифференциальный оператор¹⁾. Если заданы начальные условия

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), \dots, \quad (1.15)$$

то с помощью преобразования Лапласа это уравнение можно свести к обыкновенному дифференциальному уравнению от переменной x в предположении, что функции $\varphi_i(x)$ достаточно гладкие. Обыкновенное линейное дифференциальное уравне-

¹⁾ С постоянными коэффициентами. — *Прим. перев.*

ние при выполнении определенных условий можно решить по крайней мере в принципе, если заданы необходимые краевые условия. Однако в данный момент нас не интересует такой подход, поскольку мы заняты общим изучением уравнения (1.14). В силу линейности этого уравнения можно построить общее решение в виде суперпозиции различных фурье-компонент. Для этого представим в уравнение (1.14)

$$\varphi = a \exp \{i(kx - \omega t)\}, \quad (1.16)$$

предположив теперь, что независимые переменные x и t не входят явно в это уравнение и что оно однородное. Такая подстановка исключает все производные по t и x ($\partial/\partial t \rightarrow -i\omega$, $\partial/\partial x \rightarrow ik$) и приводит (1.14) к следующему соотношению:

$$D(\omega, k; A_i) = 0, \quad (1.17)$$

где A_i — параметры, фигурирующие в уравнении (1.14). Уравнение (1.17) является *дисперсионным соотношением*, определяющим частоту волны ω в зависимости от волнового числа и параметров A_i . Запишем его *формально* в виде

$$\omega = \omega(k; A_i). \quad (1.18)$$

Число корней уравнения (1.17) зависит от степени n этого алгебраического уравнения относительно ω . Очевидно, n равно порядку высшей производной по t в уравнении (1.14). Будем рассматривать каждый корень уравнения (1.17) в отдельности, поскольку каждый из них порождает отдельную волну, называемую *модой*¹⁾.

Рассмотрим произвольный корень

$$\omega = \omega(k). \quad (1.19)$$

Здесь мы опустили зависимость ω от A_i , так как в предстоящем рассмотрении эти параметры не играют существенной роли. Соответствующая фурье-компонента выражается в виде

$$\varphi(x, t) \sim \exp[i\{kx - \omega(k)t\}].$$

Временная эволюция величины φ зависит от свойств величины $\omega(k)$. Рассмотрим следующие случаи:

1. Если $\omega(k)$ вещественна, то приведенная выше фурье-компонента представляет гармоническую бегущую волну.

2. Если $\omega(k) = i\omega_2(k)$ — чисто мнимая величина, то

$$\varphi(x, t) \sim \exp(ikx) \exp\{\omega_2(k)t\},$$

¹⁾ Английский термин *mode* или *normal-mode*, который переведен здесь как «мода», имеет два смысла, уточняемых терминами «нормальная волна» и «нормальное колебание». В первом случае частота ω задается вместе с внешним воздействием (фактически это — особое вынужденное колебание). Во втором случае частота определяется самой системой, так как речь идет о собственных колебаниях. Автор использует термин *мода* в обоих смыслах. — *Прим. перев.*

и мы получим нераспространяющуюся стоячую волну. Если $\text{Im } \omega(k) > 0$, то φ с ростом t экспоненциально возрастает, а если $\text{Im } \omega(k) < 0$, то φ экспоненциально затухает с ростом t . Таким образом, в первом случае мы имеем дело с нарастающей (усиливающейся) волной, а во втором случае — со спадающей (затухающей) волной. В первом случае начальное возмущение системы неограниченно растет, и говорят, что система *нестабильна* относительно данной моды. Во втором случае говорят, что система относительно данной моды *стабильна*.

3. Пусть $\omega(k) = \omega_1(k) + i\omega_2(k)$, где ω_1 и ω_2 вещественны. Тогда

$$\varphi \sim \exp[i\{kx - \omega_1(k)t\}] \exp(\omega_2(k)t),$$

и при $\omega_2 = \text{Im } \omega < 0$ получаем гармоническую волну с экспоненциально убывающей амплитудой. Система в этом случае будет стабильной относительно рассматриваемой моды. Если $\text{Im } \omega > 0$, то получим гармоническую волну с экспоненциально нарастающей амплитудой. Система оказывается неустойчивой относительно рассматриваемой моды; Эддингтон [1926] называет такой тип неустойчивости *перестабилизованностью*, так как она порождена восстанавливающей силой столь интенсивной, что эта сила заставляет проскакивать положение равновесия системы. Такая сила порождает колебания с возрастающей амплитудой.

Проведенное выше обсуждение дисперсионного соотношения ясно показывает важность этого соотношения при рассмотрении отклика системы на начальное возмущение, которое в первый момент предполагается бесконечно малым. Дисперсионное соотношение дает, кроме того, основу для другой классификации волн. Пусть уравнение (1.19) определяет вещественные ω для каждого k : $0 \leq k < \infty$. Если $\partial^2 \omega / \partial k^2 = \omega''(k) \neq 0$, то говорят, что волна *диспергирующая*. Если $\omega''(k) \equiv 0$, то говорят, что волна *недиспергирующая*. Такая классификация позволяет ввести новую характеристическую скорость, называемую *групповой скоростью* и обозначаемую через $V_g = \omega'(k)$.

Наконец, на основе дисперсионного соотношения возможна еще одна классификация волн. Если выражение (1.19) определяет комплексное значение ω , то говорят, что волна *диссипирующая*¹⁾; если ω действительное, то волна *недиссипирующая*. Диссипирующие волны связаны с затуханием амплитуды со временем, которое возникает благодаря некоторому диссипативному механизму, имеющему место в системе.

¹⁾ В английском тексте она называется *diffusive*. Мы изменили название, чтобы не смешивать с волнами диффузии, и подчеркиваем в нем диссипативный механизм системы. — *Прим. перев.*

1.4. Диспергирующие волны; групповая скорость

Введя понятие групповой скорости и определив формально понятия диспергирующих и недиспергирующих волн, мы придадим им теперь определенный физический смысл.

Групповая скорость

Рассмотрим суперпозицию двух гармонических бегущих волн, немного различающихся по частоте и волновым числам, но имеющих одинаковые амплитуды:

$$\varphi_1(x, t) = a \cos(kx - \omega t), \quad (1.20)$$

$$\varphi_2(x, t) = a \cos\{(k + \delta k)x - (\omega + \delta\omega)t\}. \quad (1.21)$$

В результате сложения получим известное выражение для биений:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_1 + \varphi_2 = \\ &= [2a \cos\{1/2(x\delta k - t\delta\omega)\}] \cos\{(k + \delta k/2)x - (\omega + \delta\omega/2)t\}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Величина колеблется с частотой $\omega + 1/2\delta\omega$, немного отличающейся от ω , и имеет длину волны, немного отличную от $\lambda = 2\pi/k$. Суммарная амплитуда

$$A = 2a \cos\{1/2(x\delta k - t\delta\omega)\} \quad (1.23)$$

медленно меняется с периодом $4\pi/\delta\omega$ и характеризуется длиной волны $4\pi/\delta k$, определяемой как интервал между смеж-

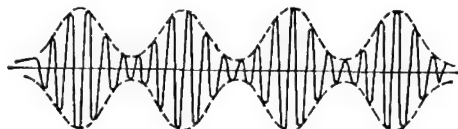


Рис. 1.2. Возникновение «биений» (групп) в результате суперпозиции двух гармонических волн.

ными пучностями. Поскольку $\delta\omega$ и δk малы, период и длина волны A велики.

В результате усиливающей и ослабляющей интерференции графики функции φ как по временной, так и по пространственной осям представляются в виде ряда периодически повторяющихся групп, показанных на рис. 1.2. Каждая группа состоит из нескольких волн. Поверхность, на которой амплитуда группы остается неизменной, определяется уравнением

$$x\delta k - t\delta\omega = \text{const}. \quad (1.24)$$

Из (1.24) следует, что сами группы распространяются со скоростью

$$dx/dt = \delta\omega/\delta k = \omega'(k) \quad \text{при} \quad \delta k \rightarrow 0, \quad (1.25)$$

где штрих означает дифференцирование по k . Таким образом, групповая скорость V_g дается выражением

$$V_g = \omega'(k) = \frac{\text{Приращение частоты волны в группе}}{\text{Приращение волнового числа в группе}}.$$

Проведенная выше дискуссия раскрывает физический смысл групповой скорости. Напомним, что мы определили фазовую скорость как отношение $V_p = \omega/k$.

Диспергирующие и недиспергирующие волны

Как фазовая, так и групповая скорости, вообще говоря, являются функциями волнового числа. Легко показать, что если $\omega''(k) \neq 0$, то V_g отличается от V_p и зависит от k таким образом, что волны различной длины распространяются с различными групповыми скоростями. Рассмотрим возмущение, возникающее вблизи $x=0$ в момент времени $t=0$ и представляющее суперпозицию ряда гармонических волн различной длины. Так как компоненты возмущения с различными волновыми числами распространяются с различными скоростями, через некоторое время начальное возмущение растянется на некоторый интервал, который будет расти со временем. В этом случае мы говорим, что волна *диспергирует*. Очевидно, что волновое число меняется вдоль цуга волн медленно.

При $\omega''(k) \equiv 0$ фазовая и групповая скорости совпадают и разделения волн с различными волновыми числами не происходит. В этом случае мы имеем недиспергирующую волну.

Пример

Подставив (1.16) в (1.1), получим дисперсионное соотношение $\omega = \pm ck$, так что $V_g = V_p = \pm c$ и волна, описываемая уравнением (1.1), является недиспергирующей и недиссипирующей.

1.5. Общее решение линейного волнового уравнения

До сих пор мы рассматривали фурье-компоненты линейной волны. Мы можем получить общее решение уравнения путем сложения этих отдельных фурье-компонент:

$$\varphi(x, t) = \int_0^{\infty} A(k) \exp[i\{kx - \omega(k)t\}] dk, \quad (1.26)$$

где $\omega = \omega(k)$ — функция волнового числа и параметры задачи определяются дисперсионным уравнением, а *спектральная функция* $A(k)$ учитывает начальные условия. В принципе мы всегда можем построить спектральную функцию данной задачи, хотя иногда это может оказаться довольно

трудоемким. Решение (1.26) соответствует начальному условию

$$\varphi(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \exp(ikx) dk, \quad (1.27)$$

представляющему интеграл Фурье функции $\varphi(x, 0)$, и поэтому функцию $A(k)$ можно определить по заданной функции $\varphi(x, 0)$.

Теперь рассмотрим асимптотическое поведение выражения (1.26) при $t \rightarrow \infty$. Интересно выяснить, как ведет себя (1.26) по истечении большого отрезка времени $t \gg t_c$, где t_c — некоторое характерное время, например период P . Простейшим методом нахождения асимптотического значения (1.26) является метод наискорейшего спуска, называемый также *методом седловых точек*, или *методом перевала*. Он требует наименьшего объема сведений о подынтегральных функциях. (В приложении I в конце этой главы мы коротко опишем этот метод; см. также Джеффрис и Джеффрис [1966], Деннери и Крживицкий [1967].¹⁾) Запишем (1.26) в форме

$$\varphi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \exp\{it\chi(k)\} dk, \quad (1.28)$$

где фазовая функция $\chi(k)$ задана в виде

$$\chi(k) = (x/t)k - \omega(k). \quad (1.29)$$

Предположим, что $\chi(k)$ — аналитическая функция на комплексной плоскости k для фиксированного значения x/t . В большинстве физически интересных задач это предположение справедливо. Седловая точка определяется как точка, в которой фазовая функция $\chi(k)$ принимает стационарное значение. Таким образом, в данном случае седловые точки задаются уравнением

$$[\partial\chi(k)/\partial k]_{x/t=\text{const}} = 0, \quad (1.30a)$$

$$\text{т. е. } \omega'(k) = x/t, \text{ если } \omega''(k) \neq 0. \quad (1.30б)$$

Разрешая это уравнение относительно k , получим выражение для седловых точек:

$$k_t = k_t(x/t). \quad (1.30в)$$

Так как путь интегрирования проходит по вещественной оси, достаточно рассмотреть вещественные седловые точки k_t .

¹⁾ См., кроме того, Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1973. — *Прим. перев.*

Для седловой точки k_i метод перевала дает следующее асимптотическое выражение функции $\varphi(x, t)$ при $t \rightarrow \infty$:

$$\varphi(x, t) \approx \frac{\sqrt{2\pi} A(k_i) \exp \{it\chi(k_i) + i\alpha\}}{\{t|\chi''(k_i)|\}^{1/2}} = \quad (1.31a)$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi} A(k_i) \exp [i\{k_i x - \omega(k_i)t\} + i\alpha]}{\{t|\omega''(k_i)|\}^{1/2}}, \quad (1.31b)$$

где

$\alpha = \pi/4$, если $\omega''(k_i) < 0$,

т. е. χ имеет минимум при k_i , (1.32)

$\alpha = -\pi/4$, если $\omega''(k_i) > 0$,

т. е. χ имеет максимум при k_i .

Вклад других седловых точек аналогичен, поэтому, принимая во внимание все седловые точки (пусть их будет m), получаем

$$\varphi(x, t) \approx \sum_{i=1}^m \frac{A(k_i) \sqrt{2\pi} \exp [i\{k_i x - \omega(k_i)t\} - (i\pi/4) \operatorname{sign} \omega''(k_i)]}{\{t|\omega''(k_i)|\}^{1/2}}, \quad (1.33)$$

где

$$\operatorname{sign} \omega''(k_i) = \begin{cases} -1, & \text{если } \omega''(k_i) < 0, \\ 1, & \text{если } \omega''(k_i) > 0. \end{cases} \quad (1.34)$$

Асимптотическое выражение (1.31б) для функции $\varphi(x, t)$ является несколько неожиданным по ряду причин:

1. Оно описывает локально гармоническую волну, хотя начальная волна не была гармонической; заметим, что, в силу (1.30в), k_i и $\omega(k_i)$ меняются в зависимости от x/t .

2. Асимптотически при $t \gg P$ остается дополнительная фаза, равная $\pi/4$, если групповая скорость $\omega'(k)$ уменьшается с ростом k , и равная $-\pi/4$, если групповая скорость $\omega'(k)$ увеличивается с ростом k .

3. Если $\omega''(k_i) \neq 0$, то на расстояниях порядка x и для времен порядка t амплитуда $\bar{A}(t)$ волны

$$\bar{A}(t) = \frac{\sqrt{2\pi} A(k_i)}{\{t|\omega''(k_i)|\}^{1/2}} \quad (1.35)$$

уменьшается обратно пропорционально квадратному корню из t . Это видно из следующего анализа изменения k с изменением x и t . Предположив, что $\omega''(k_i) \neq 0$, и переписав (1.30б) в явной форме относительно x , для седловой точки k получим

$$x = \omega'(k)t. \quad (1.36)$$

Вычислив частные производные по x и t , получим

$$\frac{k_x}{k} = \frac{\omega'(k)}{k\omega''(k)} \frac{1}{x} = O\left(\frac{1}{x}\right), \quad (1.37)$$

$$\frac{k_t}{k} = -\frac{\omega'(k)}{k\omega''(k)} \frac{1}{t} = O\left(\frac{1}{t}\right). \quad (1.38)$$

Так как мы рассматриваем большие значения времени ($t \gg P$) и большие расстояния ($x \gg \lambda$), приведенные выше выражения предсказывают относительные изменения порядка $O(1)$ лишь для времен и расстояний порядка $T(\sim t)$ и $L(\sim x)$ соответственно. Поэтому на расстояниях порядка d ($\lambda \ll d \ll L$) и для времен порядка τ ($P \ll \tau \ll T$) изменениями k , а значит, и $\omega(k)$ можно пренебречь. Действительно, именно в силу приведенных рассуждений мы пренебрегли изменениями $A(k_i)$ и $\omega''(k_i)$ при описании асимптотического поведения величины A в зависимости от t на основе выражения (1.35). Весьма эффективная нелинейная теория диспергирующих волн, изложенная в гл. 5, опирается на этот факт.

С первого взгляда спад амплитуды волны в недиссипативной системе кажется удивительным. Однако нетрудно понять, что причиной этому является перераспределение энергии начальной волны на все более растягивающийся цуг волн, удлиняющийся со временем из-за дисперсии. То, что наши доводы правильны, следует из элементарного рассуждения. Энергия между волновыми числами k_i и $k_i + dk$ сначала пропорциональна $A^2(k_i)dk$. По истечении времени t интервал между этими волновыми числами становится равным

$$|t\omega'(k_i) - t\omega'(k_i + dk)| \approx t|\omega''(k_i)|dk.$$

Таким образом, теперь плотность энергии пропорциональна $A^2(k_i)dk/[t|\omega''(k_i)|dk]$. Так как плотность энергии волны пропорциональна квадрату амплитуды, амплитуда волны в момент времени t оказывается пропорциональной $A(k_i)/\{t|\omega''(k_i)|\}^{1/2}$.

Примечание. Если $\omega''(k_i) = 0$, то приведенные выше рассуждения следует существенно изменить. Лайтхилл [1965], используя теорию асимптотического поведения интеграла Фурье, показал, что вклад седловой точки k_i в $\varphi(x, t)$ в асимптотическом приближении при $\omega'''(k_i) \neq 0$ равен

$$\varphi(x, t) \approx A(k_i) \exp[i\{k_i x - \omega(k_i)t\}] (1/3)! \sqrt{3}/[(t/6)|\omega'''(k_i)|]^{1/3} \\ \text{(здесь } (1/3)! = \Gamma(4/3)). \quad (1.39)$$

Таким образом, амплитуда теперь убывает обратно пропорционально кубическому корню из t .

1.6. Распространение энергии в диспергирующей волне

Теперь мы определим скорость, с которой энергия распространяется в диспергирующей волне. Рассмотрим две волны с волновыми числами k_1 и k_2 , возникшие в момент $t = 0$ в точке $x = 0$ и распространяющиеся со скоростями $V_1(k_1)$ и $V_2(k_2)$ соответственно. По истечении достаточно большого времени t эти волны окажутся в точках x_1 и x_2 , где

$$x_1 = V_1(k_1)t \text{ и } x_2 = V_2(k_2)t. \quad (1.40)$$

Здесь V_1 и V_2 — групповые скорости, соответствующие волновым числам k_1 и k_2 . В момент времени t значение ϕ определяется выражением (1.31б), представляющим *приближенно* гармоническую волну, если пренебречь медленными изменениями k_i и $\omega(k_i)$ в зависимости от x и t . Поэтому энергия E волны, заключенная между x_1 и x_2 , может считаться пропорциональной выражению

$$\int_{V_1 t}^{V_2 t} \frac{2\pi A^2(k_i) \sin^2 \{k_i x - \omega(k_i)t \pm \pi/4\} dx}{t |\omega''(k_i)|}. \quad (1.41)$$

При t в интервале $P \ll t \ll T$ между x_1 и x_2 укладывается несколько длин волн, и мы можем считать k_i и $\omega(k_i)$ приближенно постоянными. Осредняя гармонический член, стоящий под знаком интеграла (1.41), получаем выражение

$$E \sim \int_{V_1 t}^{V_2 t} \pi A^2(k_i) dx / [t |\omega''(k_i)|], \quad (1.42)$$

которое после подстановки $x = Vt$ принимает вид

$$E \sim \int_{V_1 t}^{V_2 t} \pi A^2(k_i) dV / [|\omega''(k_i)|]. \quad (1.43)$$

Но из (1.30б) и (1.30в) имеем

$$k_i = k_i(V), \quad V = \omega'(k_i), \quad (1.44)$$

тогда $A(k_i)$ и $\omega''(k_i)$ можем рассматривать как функции V , так что интегрирование в принципе может быть проведено и его результат будет зависеть только от V_1 и V_2 независимо от x и t . Отсюда мы заключаем, что энергия между двумя точками в волне, возникшей в начале координат и распространяющейся с постоянными скоростями, не зависит от t , если эти скорости являются локальными групповыми скоростями. Из выражений (1.40) следует

$$x_2 - x_1 = [V_2(k_2) - V_1(k_1)]t, \quad (1.45)$$

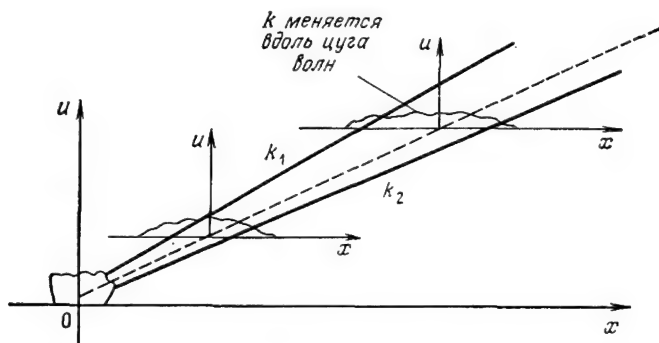
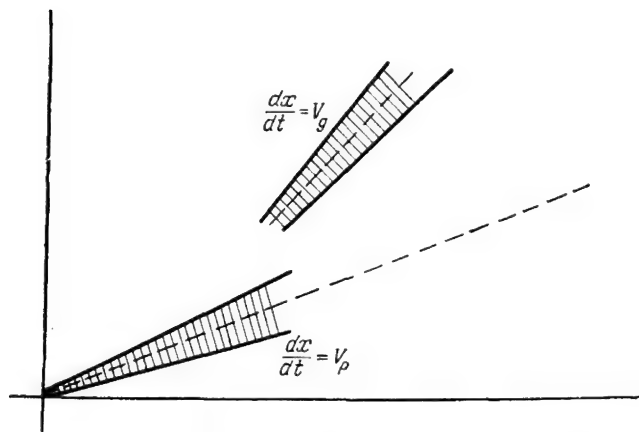
Рис. 1.3. Дисперсия волн, возникающих при $x = 0$, $t = 0$.

Рис. 1.4. Переход волны, двигающейся с фазовой скоростью, к движению с групповой скоростью.

т. е. $x_2 - x_1$ растет линейно с t . Вывод асимптотического выражения (1.316) показывает, что данное волновое число определяет пространственную осцилляцию в точках, определяемых выражением (1.306). Это означает, что если наблюдатель движется вдоль волны с групповой скоростью $\omega'(k)$, то он будет всегда фиксировать волну с волновым числом k . В следующем разделе мы дадим другое доказательство этого утверждения.

Отметим следующий важный факт. Если мы хотим следовать за волной с заданным волновым числом, то должны двигаться со скоростью $V_g(k)$. Таким образом, через время t ($\gg P$) эта волна будет находиться в точке

$$x_1 = V_g(k)t, \quad (1.46)$$

а не в точке

$$x_2 = V_p(k)t. \quad (1.47)$$

В точке x_2 будет находиться другая волна с некоторым другим волновым числом k' , таким, что $V_g(k') = V_p(k)$. Более того, волна первоначально распространяется со скоростью $V_p = \omega/k$ и по истечении достаточно длительного времени t ($\gg P$) начинает распространяться с групповой скоростью $V_g = \omega'(k)$. Изложенные выше факты иллюстрируются на рис. 1.3 и 1.4.

1.7. Важное кинематическое соотношение

Рассмотрим отрезок единичной длины в бегущей периодической волне, в которой полностью развились явления дисперсии, а волновое число и частота изменяются во времени и пространстве. Из определения волнового числа ясно, что в момент t на этом отрезке уложится k волн, т. е. k волновых гребней, так что k_t определяет скорость изменения числа гребней в единицу времени на единице длины. Согласно определению частоты волны, число волн, т. е. число гребней, проходящих через фиксированную точку за единицу времени, равно ω , так что ω_x определяет в чистом виде поток числа волн, проходящих через оба конца отрезка единичной длины. Если мы предположим, что волновые гребни не создаются и не уничтожаются, то придем к следующему кинематическому соотношению:

$$k_t + \omega_x = 0, \text{ или } \partial k / \partial t + \omega'(k) \partial k / \partial x = 0, \quad (1.48)$$

весьма важному в свете дисперсионного соотношения. Таким образом, вдоль характеристики $dx/dt = \omega'(k)$ величина $k = \text{const}$. Поэтому наблюдатель, движущийся со скоростью

$$dx/dt = \omega'(k) \equiv V_g(k), \quad (1.49)$$

будет всегда сопровождать волну с волновым числом k .

Поскольку в нашем рассмотрении скорости распространения энергии в разд. 1.6 предполагалось, что волны распространяются с локальной групповой скоростью, волновое число (длина волны) вдоль каждой волны сохраняется. Следовательно, число волн между x_1 и x_2 также возрастает пропорционально t .

Заметим, что закон сохранения (1.48) для k тождественно выполняется для однородных волн, поскольку k и ω не зависят от x и t . Поэтому данное соотношение становится важным в случае, когда волны испытывают заметную дисперсию. Мы будем часто ссылаться на (1.48) при рассмотрении групповой скорости нелинейной волны.

ЛИТЕРАТУРА

- Деннери, Крживицкий (Dennergy P., Krzywicki A.)
 [1967] *Methods of mathematical physics.* — New York: Harper and Row.
 Джеффрис Г., Джеффрис Б. (Jeffreys H., Jeffreys B. S.)
 [1966] *Methods of mathematical physics*, 3rd ed. — Cambridge Univ. Press, 1966, § 17.04, 17.05. [Перевод: Джеффрис Г., Свирлс Б. Методы математической физики. — М.: Мир, вып. 1, 1969; вып. 2—3, 1970.]
 Лайтхилл (Lighthill M. J.)
 [1965] *Group velocity.* — *J. Ins. Math. and its Appl.*, v. I, p. 1—28.
 Эддингтон (Eddington A. S.)
 [1926] *The internal constitution of stars.* — Cambridge Univ. Press.

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПЕРЕВОДЧИКОМ

- Краснушкин П. Е.
 [1963] Нормальные волны. — В кн.: *Физический энциклопедический словарь.* — М.: Советская энциклопедия, т. 3, с. 435—439.

Приложение I

МЕТОД ПЕРЕВАЛА

Метод наискорейшего спуска, называемый также дебаевским методом перевала, излагается в большинстве курсов математической физики. Изложим основные положения этого метода, с тем чтобы они находились под рукой.

Рассмотрим интеграл типа

$$I(t) = \int_c \exp \{t f(z)\} g(z) dz, \quad (\text{I. 1})$$

где без потери общности будем считать t вещественной и положительной величиной, а функции $f(z)$ и $g(z)$ аналитическими в некоторой области изменения комплексного переменного z , содержащей контур интегрирования c . Будем интересоваться асимптотическим значением $I(t)$ при $t \rightarrow \infty$.

Положим $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, где φ и ψ — вещественные функции $x = \operatorname{Re} z$ и $y = \operatorname{Im} z$. Теперь запишем экспоненциальную часть подынтегрального выражения в виде

$$\exp \{t f(z)\} = \exp(t\varphi) \exp(i t\psi). \quad (\text{I. 2})$$

Вклад экспоненциального множителя подынтегрального выражения в $I(t)$ порождается частью контура c , в которой φ достигает относительного максимума (очевидно, что если $f(z)$ — аналитическая функция, то φ и ψ не могут достигать абсолютного максимума или абсолютного минимума), если только осцилляции, вызванные в нем членом $\exp(i t\psi)$, не уничтожают вклад $\exp(t\varphi)$. Поэтому ясно, что мы должны

сперва найти на контуре точки, в которых $\varphi(x, y)$ достигает относительного максимума, и деформировать контур c в окрестности каждой из этих точек таким образом, чтобы вдоль этого деформированного пути функция ψ была постоянной; это исключит частую смену знака экспоненциального множителя.

Стационарные точки функции $f(z)$ задаются уравнением

$$f'(z) = 0. \quad (I.3)$$

Пусть z_0 — один из корней (I.3), и пусть c_0 — путь, проходящий через точку z_0 и деформированный так, что $\varphi = \operatorname{Re} f(z)$ достигает относительного максимума при $z = z_0$, а $\psi = \operatorname{Im} f(z)$ остается постоянной вдоль контура c_0 . Таким образом, если z — точка в окрестности z_0 , то выберем c_0 так, чтобы на нем

$$\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} f(z_0). \quad (I.4)$$

По теореме Тейлора мы можем разложить $f(z)$ в окрестности z_0 в ряд

$$f(z) = f(z_0) + \frac{1}{2!} (z - z_0)^2 f''(z_0) + \dots,$$

так как $f'(z_0) = 0$ в силу (I.3).

Выбрав z достаточно близким к z_0 , мы можем, не совершая существенной ошибки, приближенно положить

$$f(z) = f(z_0) + \frac{1}{2!} (z - z_0)^2 f''(z_0), \quad (I.5)$$

что с учетом (I.4) приводит к выражению

$$\operatorname{Re} [f(z) - f(z_0)] = \frac{1}{2} (z - z_0)^2 f''(z_0). \quad (I.6)$$

Таким образом, правая часть (I.6) также вещественна. Теперь положим в выражении (I.5)

$$z - z_0 = r \exp(i\theta), \quad (I.7)$$

$$\frac{1}{2} f''(z_0) = R \exp(i\alpha), \quad (I.8)$$

где z_0 — фиксированная точка, а R и α — постоянные. Отсюда

$$\operatorname{Re} [f(z) - f(z_0)] = r^2 R \cos(2\theta + \alpha), \quad (I.9)$$

$$\operatorname{Im} [f(z) - f(z_0)] = r^2 R \sin(2\theta + \alpha). \quad (I.10)$$

Принимая во внимание (I.4), получим вдоль c_0

$$\sin(2\theta + \alpha) = 0, \text{ т. е. } \theta = -\alpha/2 + n\pi/2, \quad n = 0, 1, 2, 3. \quad (I.11)$$

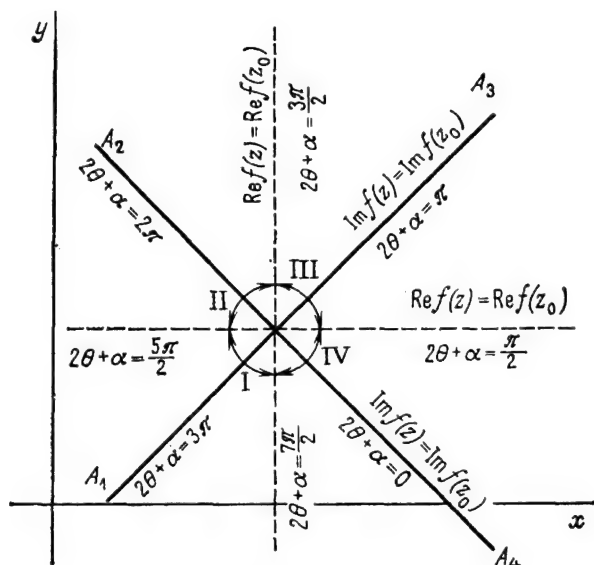


Рис. I.1. Разделение плоскости z в окрестности z_0 на четыре области, в которых $\operatorname{Re} f(z) > \operatorname{Re} f(z_0)$ и $\operatorname{Re} f(z) < \operatorname{Re} f(z_0)$. На рисунке показаны также прямые, на которых $\operatorname{Im} f(z)$ постоянна.

Подставляя это значение θ в (I.7), получаем

$$z = z_0 \pm r \exp(-i\alpha/2) \begin{cases} + & \text{при } n=0, \\ - & \text{при } n=2; \end{cases} \quad (\text{I.12})$$

$$z = z_0 \pm r \exp\{i(-\alpha/2 + \pi/2)\} \begin{cases} + & \text{при } n=1, \\ - & \text{при } n=3. \end{cases} \quad (\text{I.13})$$

Уравнения (I.12) и (I.13) описывают на плоскости z две прямые линии, проходящие через z_0 и образующие с вещественной осью z углы $-\alpha/2$ и $\pi/2 - \alpha/2$. Аналогично $\operatorname{Re}[f(z) - f(z_0)] = 0$, причем $\cos(2\theta + \alpha) = 0$, т. е. $\theta = (2n + 1)(\pi/4) - \alpha/2$, $n = 0, 1, 2, 3$. Подставляя эти значения в (I.7), получаем две прямые, проходящие через точку z_0 и образующие с вещественной осью углы $\pi/4 - \alpha/2$ и $3\pi/4 - \alpha/2$:

$$z = z_0 \pm r \exp\{i(\pi/4 - \alpha/2)\} \begin{cases} + & \text{при } n=0, \\ - & \text{при } n=2; \end{cases} \quad (\text{I.14})$$

$$z = z_0 \pm r \exp\{i(3\pi/4 - \alpha/2)\} \begin{cases} + & \text{при } n=1, \\ - & \text{при } n=3. \end{cases} \quad (\text{I.15})$$

Прямые (I.14) и (I.15) делят плоскость z в окрестности точки z_0 на четыре сектора, в которых попеременно $\operatorname{Re} f(z) > \operatorname{Re} f(z_0)$ и $\operatorname{Re} f(z) < \operatorname{Re} f(z_0)$, как показано на рис. I.1.

Так как между двумя смежными нулями косинуса лежит один и только один нуль синуса, в каждом секторе имеется одна и только одна прямая, на которой $\operatorname{Im} f(z)$ постоянна. Эти прямые проведены также на рис. 1.1, а на рис. 1.2 изображена поверхность S , уравнение которой определяется зависимостью $\operatorname{Re} f(z)$ от $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$; точка P_0 на S соответствует точке z_0 . Точки поверхности S , соответствующие точкам z в секторах II и IV, например, лежат ниже P_0 , в то время как точки S , соответствующие секторам II и III, расположены выше P_0 . Таким образом, мы можем мысленно

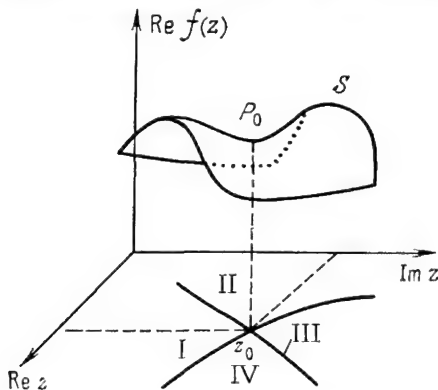


Рис. 1.2. Поведение функции $\operatorname{Re} f(z)$ в окрестности седловой точки z_0 .

сравнить S с конским седлом (отсюда происходит название метода: метод седловых точек).

Теперь очевидно, как выбрать путь c_0 , проходящий через z_0 , вдоль которого должно быть выполнено интегрирование таким образом, чтобы получить наибольший вклад в $I(t)$ на участке пути c_0 наименьшей длины: $\operatorname{Re} f(z)$ будет иметь относительный максимум в точке z_0 , если c_0 лежит в секторах II и IV. Так как

мы требуем, чтобы вдоль c_0 функция $\operatorname{Im} f(z)$ была постоянной, то путь c_0 должен проходить вдоль линий, на которых $\sin(2\theta + \alpha) = 0$. Очевидно поэтому, что c_0 проходит вдоль прямой A_2A_4 . Теперь мы покажем, что производная функции $\operatorname{Re} f(z)$ в точке z_0 вдоль прямой A_2A_4 будет максимальна. Выпишем производные от φ и ψ в точке z_0 вдоль направления, образующего угол θ с вещественной осью z :

$$\varphi_s = \varphi_x \cos \theta + \varphi_y \sin \theta, \quad \psi_s = \psi_x \cos \theta + \psi_y \sin \theta.$$

Экстремальные значения φ_s определяются условием $\partial \varphi_s / \partial \theta = 0$, т. е. направлением θ , задаваемым уравнением

$$\sin \theta / \varphi_y = \cos \theta / \varphi_x = 1 / \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}, \quad (\text{I. 16})$$

и, следовательно,

$$\partial^2 \varphi_s / \partial \theta^2 = -2\varphi_x \varphi_y / \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}. \quad (\text{I. 17})$$

В этом направлении в силу условий Коши — Римана

$$\varphi_s = [\varphi_x \varphi_x + \varphi_y \varphi_y] / \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2} = 0. \quad (\text{I. 18})$$

Итак, желаемый результат доказан; φ_s достигает максимального значения на направлении θ , вдоль которого $\operatorname{Im} f(z)$ постоянна. Таким образом, вдоль линии A_2A_4 величина $\operatorname{Re} f(z)$ имеет наибольший из всех возможных наклонов. Благодаря этому свойству метод получил название «метод наискорейшего спуска».

Мы можем легко обобщить этот метод на случай учета членов более высокого порядка в разложении (I.5). Однако теперь пути, вдоль которых $\operatorname{Im} f(z)$ постоянна, будут кривыми, касательными к которым в седловой точке z_0 являются прямые A_1A_3 и A_2A_4 . Переписав (I.5) в виде

$$\bar{f}(z) = \bar{f}(z_0) - \xi^2, \quad (\text{I. 19})$$

где

$$\xi^2 = -1/2 (z - z_0)^2 f''(z_0), \quad (\text{I. 20})$$

мы обнаружим, что ξ^2 — вещественная положительная величина, поскольку (I.19) фактически означает, что $\operatorname{Re} \bar{f}(z_0) = -\operatorname{Re} \bar{f}(z) = \xi^2$, так как мнимая часть постоянна вдоль пути c_0 , а в точке z_0 функция $\operatorname{Re} \bar{f}(z)$ имеет относительный максимум. Вещественная переменная ξ при переходе z через z_0 вдоль пути c_0 меняет знак. Подставляя $z - z_0$ из (I.7) и $1/2 f''(z_0)$ из (I.8) в (I.20), получаем

$$\xi^2 = -Rr^2 \exp\{i(2\theta + \alpha)\} > 0,$$

так что

$$\begin{aligned} \xi &= R^{1/2}r \text{ по одну сторону } z_0 \text{ и} \\ \xi &= -R^{1/2}r \text{ по другую сторону } z_0 \text{ на пути } c_0. \end{aligned} \quad (\text{I. 21})$$

Поэтому из формул (I.7) и (I.21) имеем

$$z - z_0 = \pm \xi \exp(i\theta)/R^{1/2} \quad (\text{I. 22})$$

или

$$dz/d\xi = \pm \sqrt{2} \exp(i\theta)/|f''(z_0)|^{1/2}, \quad (\text{I. 23})$$

где нам надлежит брать только один из двух знаков для всех точек контура c_0 (см. замечания после формулы (I.26)). Подставляя $\bar{f}(z)$ из (I.19) в (I.1), получаем

$$I_0(t) \approx \exp\{t\bar{f}(z_0)\} \int_{c_0} \exp\{-t\xi^2(z)\} g(z) dz, \quad (\text{I. 24})$$

где c_0 — путь наискорейшего спуска. Если t положительно и велико, то основной вклад в $I_0(t)$ дает интервал c_0 , где ξ мало, поскольку при больших ξ подынтегральное выражение экспоненциально убывает. Поэтому мы совершим *пренебрежимо малую ошибку*, если заменим интеграл по контуру

в окрестности точки $\xi = 0$, $|\xi| \ll 1$, интегралом от $\xi = -\infty$ до $\xi = \infty$. В результате получим

$$\begin{aligned}
 I_0 &\approx \exp \{t f(z_0)\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t \xi^2) g(z) \frac{dz}{d\xi} d\xi \approx \\
 &\approx \frac{\pm \sqrt{2} \exp(i\theta) \exp \{t f(z_0)\}}{|f''(z_0)|^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t \xi^2) \{g(z_0) + (z - z_0) g'(z_0) + \\
 &+ (1/2!) (z - z_0)^2 g''(z_0) + \dots\} dz \approx \frac{\pm \sqrt{2} \exp(i\theta) \exp \{t f(z_0)\}}{|f''(z_0)|^{1/2}} \times \\
 &\times \left[g(z_0) \sqrt{\frac{\pi}{t}} + \frac{\exp(2i\theta) g''(z_0)}{|f''(z_0)|} \frac{\sqrt{\pi}}{2t^{3/2}} + \dots \right], \quad (I. 25)
 \end{aligned}$$

так что при больших t

$$I_0(t) \approx \frac{\pm \sqrt{2\pi} \exp(i\theta) \exp \{t f(z_0)\}}{|t f''(z_0)|^{1/2}} g(z_0). \quad (I. 26)$$

В интервале $(-\pi, \pi)$ можно выбрать два возможных значения θ , различающихся на π . В любом конкретном случае мы должны решить, исходя из поведения вещественной и мнимой частей $f(z)$, в каком направлении проходит путь интегрирования через седловую точку. Если мы выберем значение θ , при котором r положительно в точках после прохождения через z_0 , то следует взять в (I. 22) знак плюс при условии, что ξ меняется от $-\infty$ до ∞ вдоль пути интегрирования.

Заметим, что асимптотическое разложение (I. 25) надо понимать в смысле Пуанкаре; мы говорим, что $\sum_{k=0}^{\infty} c_k/z^k$ является асимптотическим представлением функции $f(z)$, если для любого целого положительного n

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \left[z^n \left\{ f(z) - \sum_{k=0}^n c_k/z^k \right\} \right] = 0$$

независимо от того, сходится или нет ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k/z^k$. Частичные суммы этого ряда представляют $f(z)$ достаточно точно, если $|z|$ велико, поскольку

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^n c_k/z^k \right| = O\{1/|z|^{n+1}\} \quad \text{при } |z| \rightarrow \infty.$$

Некоторые нелинейные уравнения эволюции (стационарное решение)

2.1. Введение

Хорошо известно, что задачи с начальными и граничными условиями для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных очень трудны для решения общим методом. Некоторые частные задачи анализировались от случая к случаю методами, пригодными лишь для этих задач. Нелинейные волны, о которых сейчас пойдет речь, описываются нелинейными уравнениями в частных производных. В данной главе мы ограничимся изучением некоторых простых модельных уравнений нелинейных волн, которые привлекали значительное внимание в течение последних лет десяти. Это поможет нам сравнительно легко понять роль таких факторов, как нелинейность, диссипация и дисперсия, в пространственно-временной эволюции некоторого процесса. В этом фактически и заключается главная цель настоящей монографии. В соответствии с этим намерением мы предпримем сравнительное изучение двух классов уравнений: линейных (класс I) и нелинейных (класс II) уравнений.

Класс I линейных уравнений

- (a) $u_t + cu_x = 0, \quad c = \text{const};$
- (b) $u_t + cu_x - \mu u_{xx} = 0, \quad c, \mu = \text{const}, \mu > 0;$
- (c) $u_t + cu_x + Ku_{xxx} = 0, \quad c, K = \text{const}, K > 0.$

Класс II нелинейных уравнений

- (a) $u_t + uu_x = 0;$
- (b) $u_t + uu_x - \mu u_{xx} = 0$ (уравнение Бюргерса);
- (c) $u_t + uu_x + Ku_{xxx} = 0$ (уравнение Кортевега — де Фриза (КдФ)).

Уравнение Бюргерса является простейшей моделью диссипирующих волн и при некоторых упрощающих предположениях помимо всего прочего охватывает следующие случаи: турбулентность (где это уравнение впервые появилось), звуковые волны в вязкой среде, волны в вязкоупругих трубках, наполненных жидкостью, магнитогидродинамические волны в среде с конечной электропроводимостью. Уравнение КдФ представляет собой простейшую модель диспергирующих волн и при определенных упрощающих условиях охватывает волны следующих типов: длинные волны на поверхности

жидкости, плазменные волны, волны в решетках, слабо нелинейные магнитогидродинамические волны. Широкая область применения этих уравнений является главной причиной того, что в течение последнего десятилетия они привлекали внимание математиков.

В гл. I мы определили диспергирующие и диссипирующие волны при помощи дисперсионного соотношения, полученного методом Фурье. Мы не можем применить метод Фурье к нелинейным уравнениям и поэтому должны найти другой способ классификации этих волн. Обычно говорят, что волна, описываемая нелинейным уравнением, является диссипирующей или диспергирующей в зависимости от того, является ли диссипирующей или диспергирующей волна, описываемая соответствующим линеаризованным уравнением. В настоящей главе наши усилия будут направлены на определение в этих уравнениях сравнительной роли нелинейных членов и членов, содержащих производные второго порядка и выше по пространственной координате.

2.2. Эффект нелинейности

Для изучения эффекта нелинейности решим уравнения I(a) и II(a) из разд. 2.1 при одинаковых начальных условиях. Начальные данные намеренно выбраны настолько простыми, чтобы физические факты не утонули в сложных математических выражениях.

2.2.1. Решение уравнения I(a)

Это уравнение линейно, и, используя метод Лагранжа, можно сразу написать его общее решение:

$$u(x, t) = f(x - ct), \quad (2.1)$$

где f — произвольная функция. Соотношение (2.1) описывает волну, движущуюся со скоростью c в положительном направлении оси x .

Конкретизируем теперь f , принимая следующее начальное условие:

$$u(x, 0) = \begin{cases} a^2 - x^2 & \text{при } |x| \leq a, \\ 0 & \text{при } |x| > a, \end{cases} \quad (2.2)$$

где $a > 0$. Соотношение (2.2) описывает параболический импульс, распределенный на отрезке $-a \leq x \leq a$. С учетом условий (2.2) решение (2.1) принимает вид

$$u(x, t) = \begin{cases} a^2 - (x - ct)^2 & \text{при } |x - ct| \leq a, \\ 0 & \text{при } |x - ct| > a. \end{cases} \quad (2.3)$$

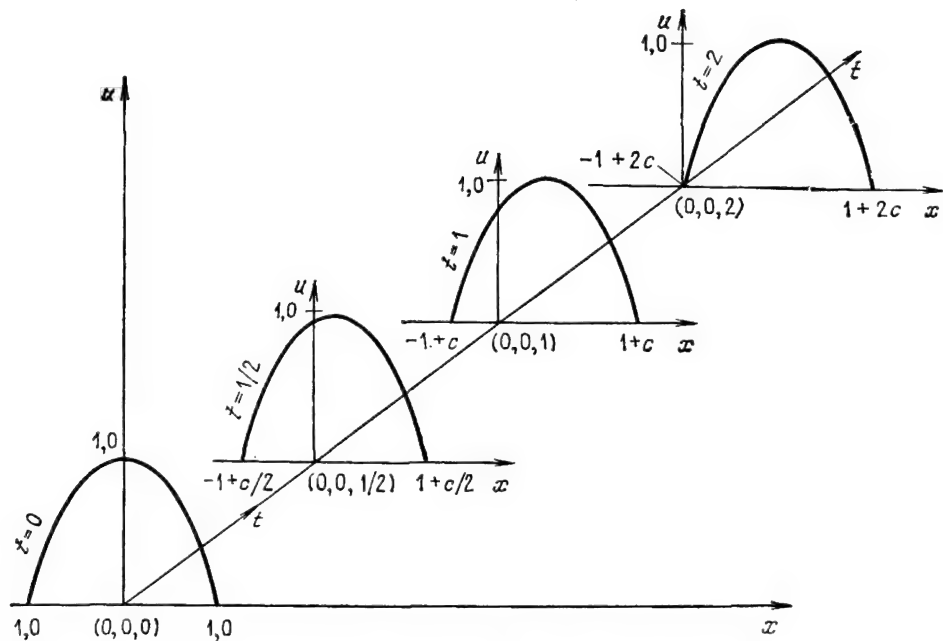


Рис. 2.1. Эволюция параболического импульса согласно выражению (2.3), где $a = 1$, $c = 1/2$, масштаб по оси u : 1 ед. = 3 см; по оси x : 1 ед. = 1 см.

Переходя к движущейся системе координат, определяемой соотношением

$$\xi = x - ct, \quad (2.4)$$

перепишем это решение в следующей удобной форме:

$$u(x, t) = \begin{cases} a^2 - \xi^2 & \text{при } |\xi| \leq a, \\ 0 & \text{при } |\xi| > a. \end{cases} \quad (2.5)$$

Решение (2.5) не зависит явно от времени t и поэтому называется *стационарным*. В настоящей главе мы будем рассматривать большей частью только такие стационарные решения. На рис. 2.1 показано распространение (эволюция) начального параболического импульса по x и t . Решение (2.5) описывает такой же импульс, что и начальный, центр которого за время t сдвигается на ct в положительном направлении оси x . Мы отразим этот факт, говоря, что решения уравнения I(a) представляют собой волны, движущиеся без изменения формы со скоростью c в положительном направлении оси x .

2.2.2. Решение II (a)

Для изучения эффекта нелинейности решим уравнения II(a) при начальном условии (2.2). Характеристическое уравнение для уравнения II(a) имеет вид

$$dt/1 = dx/u = du/0, \quad (2.6)$$

так что вдоль характеристики

$$dx/dt = u \quad (2.7)$$

u сохраняется и общее решение уравнения II(a) таково:

$$u(x, t) = f(x - ut), \quad (2.8)$$

где f — произвольная функция.

На рис. 2.2а и 2.2б сравниваются характеристики для уравнения I(a) и II(a) в плоскости (x, t) . Заметим, что характеристики уравнения I(a) образуют семейство параллельных прямых с наклоном $\arctg c$ к оси t , в то время как характеристики уравнения II(a) в общем случае образуют семейство пересекающихся прямых. Вдоль каждой характеристики последнего семейства u остается определенной постоянной величиной, и наклон характеристики определяется соответствующим постоянным значением u .

Нашу основную идею можно кратко сформулировать так: волна, описываемая гиперболическим уравнением, распространяется с конечной скоростью. В этом смысле мы можем рассматривать каждую характеристику в плоскости (x, t) как движущуюся элементарную волну, и свойство волны,

остающееся постоянным вдоль индивидуальной характеристики, как некоторое количество информации, которую волна несет с собой. В этом смысле уравнение I(a) описывает систему элементарных волн, движущихся с одинаковой постоянной скоростью c , а постоянное значение u , связанное с характеристикой, представляет определенную информацию, которую волна несет с собой. Аналогично уравнение II(a) описы-

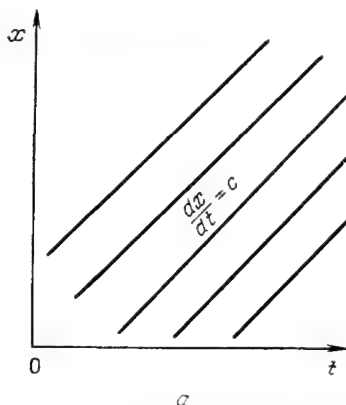


Рис. 2.2а. Характеристики уравнения I(a).

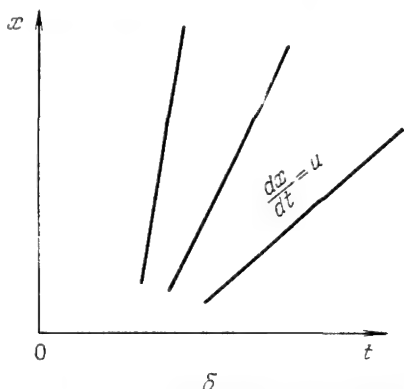


Рис. 2.2б. Характеристики уравнения II(a).

вает систему элементарных волн, движущихся с различными скоростями. Элементарная волна, которая переносит большее значение u , движется быстрее.

Чтобы изучить влияние нелинейности на распространение волнового профиля, найдем решение уравнения II(a), удовлетворяющее начальному условию (2.2). При начальном условии (2.2) решение (2.8) имеет вид

$$u(x, t) = \begin{cases} a^2 - \xi^2 & \text{при } |\xi| \leq a, \\ 0 & \text{при } |\xi| > a, \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\text{где } \xi = x - ut. \quad (2.10)$$

Разрешая (2.9) явно относительно u , имеем

$$u(x, t) = \begin{cases} (1/2t^2)[(2xt - 1) \pm (1 - 4xt + 4a^2t^2)^{1/2}] & \text{при } |x - ut| \leq a, \\ 0 & \text{при } |x - ut| > a. \end{cases} \quad (2.11)$$

Когда t мало ($t \rightarrow 0$), для удовлетворения начальному условию нужно брать только верхний знак перед радикалом в (2.11). Когда $t > T$ (T еще нужно определить), при $x > a$ в (2.11) допустимы оба знака.

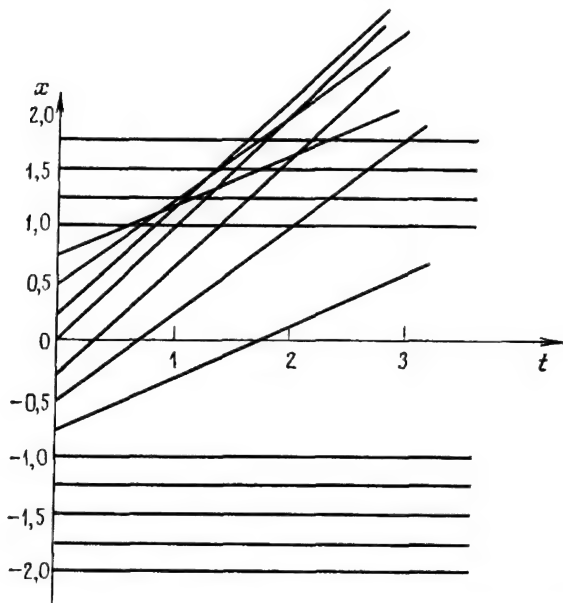


Рис. 2.3. Характеристики уравнения II(a) с начальными условиями (2.2), $a = 1$.

На рис. 2.3 изображены характеристики II(a) с начальным условием (2.2) в плоскости (x, t) при $a = 1$. Этот рисунок весьма поучителен как графическое изображение распространения элементарных волн, исходящих из разных точек оси x в момент времени $t = 0$. Все элементарные волны, исходящие из точек $(x, 0)$, где $x > -1$, рано или поздно пересекают характеристики, исходящие из точек x , где $x \geq 1$. В точке пересечения двух характеристик получают два значения u . Ясно, что такая ситуация физически неприемлема. Следовательно, если в этом случае нас интересует единственное ограниченное решение, то мы должны ввести понятие слабого решения, допускающего движущиеся разрывы. В гидродинамике такие разрывы называются *ударными волнами*. Из рис. 2.3 также очевидно, что точки $x = \pm a$ все время остаются неподвижными.

На рис. 2.4 показано распространение импульса (2.2) при $a = 1$. Когда t растет, профиль u все более и более деформируется. Отсюда мы заключаем, что нелинейность приводит к прогрессирующей деформации начального профиля волны.

Определим теперь T в этом частном случае. Начальный профиль имеет как положительный, так и отрицательный наклоны. В частности, при $x = a$ наклон отрицателен:

$$u_x(a, 0) = -2a < 0. \quad (2.12)$$

Ясно, что функция $u(x, t)$ при $x \geq a$ может быть неоднозначной только тогда, когда $u_x(a, t) > 0$. Минимальное значение t , для которого выполняется это неравенство, и есть наше T . Кроме того, $u_x(a, t)$ может переходить от отрицательных

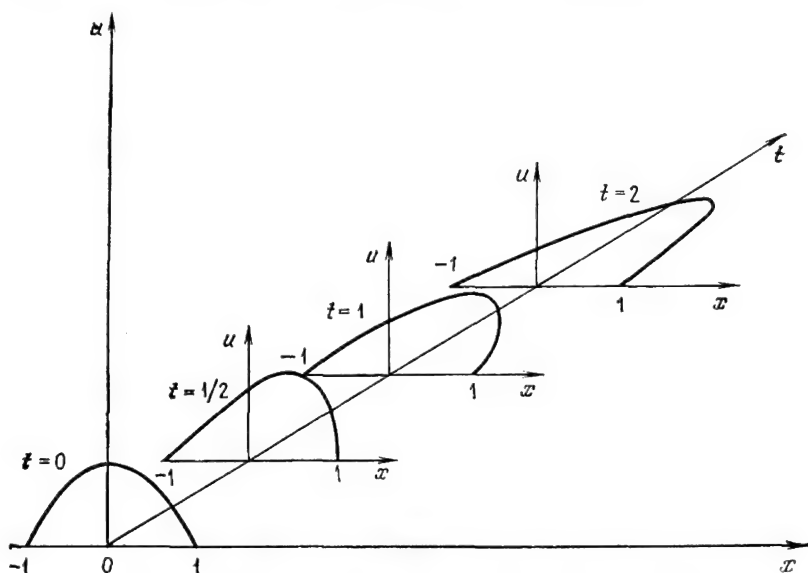


Рис. 2.4. Распространение параболического импульса, описываемого уравнением II(a) для $a = 1$.

значений к положительным только через бесконечность. Далее из (2.11) имеем

$$u_x(a, t) = (1/2t^2) [2t \mp 2t/(1 - 2at)], \quad (2.13)$$

$$\text{поэтому } T = 1/2a. \quad (2.14)$$

Предыдущие рассуждения легко распространить на профили импульсов более общего вида, чем было принято в (2.2). Пусть начальный профиль задан следующим образом:

$$u(x, 0) = \begin{cases} f(x) & \text{при } |x| \leq a, \\ 0 & \text{при } |x| > a, \end{cases} \quad (2.15)$$

где $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция с положительным и отрицательным наклонами.

Решение уравнения II(a) при условии (2.15) дается формулами

$$u(x, t) = \begin{cases} f(\xi), & \xi = x - ut \text{ при } |\xi| \leq a, \\ 0 & \text{при } |\xi| > a, \end{cases} \quad (2.16)$$

где ξ — пространственная координата, движущаяся со скоростью u (которая сама является функцией от x и t). Роль ξ подобна роли лагранжевой координаты в лагранжевом описании движения сплошной среды. При $t = 0$ имеем $x = \xi$. Беря частную производную (2.16) по x , получаем $u_x(x, t) = = f_\xi(1 - u_x t)$, так что

$$u_x(x, t) = f_\xi / (1 + f_\xi t). \quad (2.17)$$

Это соотношение выражает наклон профиля u в точке (x, t) через наклон начального профиля при $x = \xi$; здесь x — координата в момент времени t точки, которая в начальный момент имела координату ξ . Если $f_\xi < 0$, то $u_x(x, t)$ бесконечна при $t = -1/f_\xi$. Поэтому если начальный профиль имеет отрицательный наклон в некоторой точке ξ , то при $t > T = = (-1/f_\xi)_{\min}$ решение перестает быть однозначным в окрестности точки $x_0 = \xi_0 + T f(\xi_0)$, где ξ_0 — точка, в которой $(-1/f_\xi)$ достигает минимального значения. Попытаемся найти изменения наклона профиля импульса на характеристике $\xi = \xi_0$, когда t проходит значение T . Пусть $X_0(t)$ — положение характеристики элементарной волны в произвольный момент t . Мы хотим найти $u_x(X(t), t)$ для значений

$$t = T + \varepsilon = (-1/f_\xi)_{\min} + \varepsilon,$$

где $|\varepsilon|$ мало; тогда

$$\begin{aligned} u_x(X_0(t), T + \varepsilon) &= (f_\xi / (1 + f_\xi t))_{\xi=\xi_0, t=T+\varepsilon} = \\ &= \frac{f_\xi(\xi_0)}{1 + f_\xi(\xi_0)[-1/f_\xi(\xi_0) + \varepsilon]} = \frac{1}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Итак, имеем

$$u_x(X_0(T - 0), T - 0) = -\infty \quad \text{и} \quad u_x(X_0(T + 0), T + 0) = +\infty,$$

как указано выше.

2.2.3. Роль нелинейности

Таким образом, мы заключаем, что в случае уравнений типа I(a) и II(a) из разд. 2.1:

Линейные волны распространяются без изменения профиля. Роль нелинейности заключается в том, что она приводит к деформации волнового профиля, возрастающей с ростом t . По истечении некоторого времени ($t > T$) физический смысл имеет решение, содержащее движущиеся разрывы. Мы назвали такое решение слабым решением.

Заметим, что, применяя метод Фурье к линейному уравнению I(a), мы получим дисперсионное соотношение $\omega = ck$, так что и фазовая, и групповая скорости равны c . В случае

нелинейного уравнения II(a) мы не можем применять метод Фурье и поэтому не можем говорить о волновом числе, частоте, скорости волны, групповой скорости до тех пор, пока не укажем метод их определения. К этому вопросу мы вернемся в гл. 5.

2.3. Диссипирующие волны

Теперь мы исследуем уравнения I(b) и II(b) с точки зрения влияния второй производной u_{xx} . Это сравнительное изучение укажет также на влияние диссипации, производимое этим членом на деформацию волнового профиля, вызванную нелинейностью. В гидродинамике нелинейный член uu_x представляет собой конвективный член, член со второй производной — силу вязкости. Таким образом, наше исследование вскроет конкуренцию между нелинейной конвекцией, увеличивающей крутизну профиля (в области «поджатия» импульса), и вязкой диссипацией, за счет которой профиль расплывается.

2.3.1. Решение уравнения I(b)

Полагая в уравнении I(b)

$$u(x, t) = a \exp \{i(kx - \omega t)\}, \quad (2.18)$$

получаем дисперсионное соотношение

$$\omega = ck - i\mu k^2. \quad (2.19)$$

Следовательно, согласно нашему определению, введенному в гл. 1, это уравнение описывает диссипирующую волну. Таким образом, волна, описываемая уравнением II(b), является также диссипирующей в соответствии с соглашением, принятым ранее в этой главе. Из (2.19) мы имеем

$$\operatorname{Re} \omega = ck, \quad \operatorname{Im} \omega = -\mu k^2 < 0, \quad (2.20)$$

так как мы выбрали $\mu > 0$.

Учитывая (2.19), волновой профиль (2.18) можно представить выражением

$$u(x, t) = \{a \exp(-t/t_0)\} \exp \{ik(x - ct)\}, \quad (2.21)$$

которое описывает гармоническую волну с волновым числом k , скоростью c и амплитудой, экспоненциально затухающей со временем. Характерное время затухания равно

$$t_0 = 1/(\mu k^2). \quad (2.22)$$

При фиксированном μ величина t_0 убывает с ростом k . Поэтому короткие волны затухают быстрее, чем длинные. Таким образом, по истечении достаточно большого времени ($t \gg t_0$) «выживут» только длинноволновые возмущения. Аналогично

при фиксированном k величина t_0 убывает с ростом μ ; следовательно, волны заданной длины затухают быстрее в среде с большим значением μ . В этом смысле μ можно рассматривать как меру диссипации. Из уравнения (2.21) можно определить фазовую скорость

$$V_p = c = \operatorname{Re}(\omega/k). \quad (2.23)$$

2.3.2. Решение уравнения II(b)

В настоящей главе мы интересуемся стационарными решениями и поэтому будем искать стационарное решение уравнения Бюргера в виде

$$u(x, t) = u(\xi), \quad \xi = x - ct. \quad (2.24)$$

Подставляя (2.24) в II(b), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$-cu_\xi + uu_\xi - \mu u_{\xi\xi} = 0, \quad (2.25)$$

интегрирование которого дает

$$-cu + \frac{1}{2}u^2 - \mu u_\xi = A, \quad (2.26)$$

где A — постоянная интегрирования. Запишем теперь (2.26) в виде

$$u_\xi = (1/2\mu)(u - u_\infty^-)(u - u_\infty^+), \quad (2.27)$$

$$\text{где } u_\infty^+ = c - \sqrt{c^2 + 2A}, \quad u_\infty^- = c + \sqrt{c^2 + 2A} \quad (2.28)$$

— корни уравнения

$$u^2 - 2cu - 2A = 0. \quad (2.29)$$

Смысл нижнего индекса ∞ и верхних индексов $+$ и $-$ у u будет ясен, когда мы рассмотрим поведение решения при $\xi \rightarrow \pm \infty$. Чтобы обеспечить вещественность корней u_∞^\pm , предположим, что

$$c^2 + 2A > 0, \quad \text{и тогда } u_\infty^- > u_\infty^+. \quad (2.30)$$

Интегрируя (2.27), получаем

$$u(x, t) = c - \sqrt{c^2 + 2A} \operatorname{th}(\sqrt{c^2 + 2A} \xi / 2\mu) = \quad (2.31)$$

$$= \frac{1}{2}((u_\infty^- + u_\infty^+) - (u_\infty^- - u_\infty^+) \times \\ \times \operatorname{th}[\{(u_\infty^- - u_\infty^+)/4\mu\} \{x - \frac{1}{2}(u_\infty^- + u_\infty^+)t\}]), \quad (2.32)$$

где постоянная интегрирования выбрана из условия $\xi \rightarrow +\infty$, $u \rightarrow u_\infty^+$, из которого следует

$$\xi \rightarrow -\infty, \quad u \rightarrow u_\infty^-. \quad (2.33)$$

Таким образом, решение (2.31) соединяет два асимптотических состояния u_{∞}^{-} при $\xi = -\infty$ и u_{∞}^{+} при $\xi = +\infty$ с помощью непрерывно изменяющихся состояний. Из (2.28) имеем выражение

$$c = 1/2 (u_{\infty}^{-} + u_{\infty}^{+}), \quad (2.34)$$

которое для данной задачи, очевидно, является соотношением Рэнкина — Гюгонио. Следовательно, на языке гидродинамики решение (2.31) описывает структуру ударной волны. Для сравнения мы приводим ниже стационарное решение линеаризованного уравнения Бюргерса:

$$u_t - \mu u_{xx} = 0, \quad (2.35)$$

$$u(x, t) = u(\xi) = A + B \exp(-(c/\mu)\xi), \quad \xi = x - ct, \quad c > 0. \quad (2.36)$$

$$\text{При } \xi \rightarrow \infty \quad u \rightarrow A, \quad \text{но при } \xi \rightarrow -\infty \quad u \rightarrow \infty. \quad (2.37)$$

Следовательно, единственным ограниченным стационарным решением уравнения (2.35) является постоянное состояние. Таким образом, линеаризованное уравнение Бюргерса не допускает решения, соединяющего два однородных состояния множеством непрерывно изменяющихся состояний. Отсюда мы делаем вывод, что

Нелинейность уравнения Бюргерса позволяет гладко соединить два асимптотически однородных состояния с помощью непрерывно изменяющихся состояний.

Ранее отмечалось, что при наличии области отрицательного наклона у профиля импульса решение уравнения II (а) (в котором отсутствует член u_{xx}) имеет участки с весьма крутым наклоном, даже если начальный профиль не имел таких участков. Напротив, нетрудно показать, что наличие члена со второй производной не только предотвращает образование очень больших градиентов, но на самом деле сглаживает любой начальный разрыв (Лайтхилл [1956, разд. 7.3]).

Отсюда мы делаем вывод, что член второго порядка в уравнении Бюргерса не допускает появления крутых наклонов профиля волны. Итак, член второго порядка стремится нейтрализовать влияние нелинейности в области сжатия и сгладить разрывы.

Обозначим через ξ^{-} значение ξ , при котором $u(\xi^{-}) = u_{\infty}^{-} - \alpha(u_{\infty}^{-} - u_{\infty}^{+})$, и через ξ^{+} значение ξ , при котором $u(\xi^{+}) = u_{\infty}^{+} + \alpha(u_{\infty}^{-} - u_{\infty}^{+})$, где α — малая положительная величина. Тогда, из (2.31) имеем

$$\xi^{+} - \xi^{-} = [4\mu/(u_{\infty}^{-} - u_{\infty}^{+})] \{\ln(1 - \alpha) - \ln \alpha\}. \quad (2.38)$$

Из уравнения (2.38) роль параметра μ очевидна. Когда $\mu \rightarrow 0$, то $\xi^+ \rightarrow \xi^-$, так что при переходе от u_∞^- к u_∞^+ функция $u(\xi)$ терпит разрыв. Таким образом, параметр μ стремится размыть разрыв в профиле u , который стремится образовать нелинейность. Имея в виду это свойство, мы говорим, что волна является диссипирующей и μ есть мера диссипации. Действительно, на гидродинамическом языке соотношение (2.38) есть мера толщины ударной волны.

2.4. Диспергирующие волны

Чтобы выяснить роль члена, содержащего третью производную по x в уравнении II(c), по отношению к нелинейному члену, сопоставим уравнения II(c) и I(c). Ради простоты ограничимся случаем $K > 0$. Однако заметим, что в то время как нелинейное уравнение

$$u_t + uu_x + Ku_{xxx} = 0, \quad K < 0,$$

с помощью преобразования $u \rightarrow -u$, $x \rightarrow -x$, $t \rightarrow t$ всегда может быть преобразовано к уравнению

$$u_t + uu_x + (-K)u_{xxx} = 0, \quad -K > 0,$$

мы не можем одновременно преобразовывать линейное уравнение к уравнению с $K > 0$.

2.4.1. Решение I(c)

Применяя метод Фурье к линейному уравнению I(c), получаем следующее дисперсионное соотношение: $\omega = ck - Kk^3$. Таким образом, ω является действительной функцией k , и мы можем обычным способом определить фазовую и групповую скорости:

$$V_p = \omega/k = c - Kk^2 \quad (V_p - \text{функция } k),$$

$$V_g = \omega'(k) = c - 3Kk^2 \quad (V_g - \text{функция } k).$$

Поскольку $V_p \neq V_g$, волна будет диспергирующей.

2.4.2. Решение уравнения КдФ

Рассмотрим сначала линеаризованное уравнение КдФ $u_t + Ku_{xxx} = 0$, для которого дисперсионное соотношение имеет вид $\omega = -Kk^3$. Поскольку $\omega''(k) \neq 0$, волна будет диспергирующей. Отыщем теперь стационарное решение уравнения КдФ, задав его в виде

$$u(x, t) = u(\xi), \quad \xi = x - ct. \quad (2.39)$$

Подставляя (2.39) в II(c), получим

$$-cu_{\xi} + uu_{\xi} + Ku_{\xi\xi\xi} = 0. \quad (2.40)$$

Интегрируя его, приходим к уравнению

$$-cu + \frac{1}{2}u^2 + Ku_{\xi\xi} = A. \quad (2.41)$$

Умножая последнее уравнение на u_{ξ} и интегрируя, получаем

$$-\frac{1}{2}cu^2 + \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{2}Ku_{\xi}^2 = Au + B,$$

$$\text{или} \quad 3Ku_{\xi}^2 = -u^3 + 3cu^2 + 6Au + 6B \equiv f(u). \quad (2.42)$$

Перепишем его в виде

$$\frac{1}{2}u_{\xi}^2 + (1/6K)\{-f(u)\} = 0, \quad (2.43)$$

тогда, интерпретируя u и ξ как пространственную и временную координаты, мы сможем рассматривать уравнение (2.43) как уравнение сохранения энергии движения частицы единичной массы в поле потенциала $(1/6K)f(u)$ или же как уравнение ангармонического осциллятора. При определенных условиях уравнение (2.43) может описывать периодическое движение, совершающееся между двумя смежными вещественными нулями функции $f(u)$, где $f(u) \geq 0$. Такая интерпретация дает нам эффективный подход в изучении уравнения (2.42). Функция $f(u)$ — кубический полином и имеет три корня. Сначала заметим, что если $u = c$ является его корнем, то $u = c$ будет решением уравнения (2.43), описывающим состояние покоя. В дальнейшем мы будем изучать решения, описывающие непостоянные ограниченные движения. Очевидно, мы должны рассмотреть два случая: (1) когда только один корень вещественный и (2) когда все три корня вещественны.

Случай (1). Рисунок 2.5 дает ориентировочную картину изменения $f(u)$ в зависимости от u , когда имеется только один вещественный корень при $u = c_1$. Из рис. 2.5 ясно, что $f(u) < 0$, когда $u > c_1$, и $f(u) \geq 0$, когда $u \leq c_1$, поэтому для вещественных решений мы должны рассматривать интервал $u \leq c_1$. В этой области имеем

$$du/d\xi = \pm \{(1/3K)f(u)\}^{1/2}.$$

Заметим в первую очередь, что если $f'(c_1) = 0$, то состояние $u = c_1$ не может быть достигнуто на конечном расстоянии. Поэтому мы положим $f'(c_1) \neq 0$. Теперь решение рассматриваемого уравнения существует и достигает значения $u = c_1$ при $\xi = \xi_0$. Так как $f(u)$ остается положительным при $u < c_1$ и стремится к ∞ при $u \rightarrow -\infty$, то решение оказывается неограниченным.

Случай (2). Теперь рассмотрим случай, когда все три корня α , β , γ функции $f(u)$ вещественны. Не теряя общности, мы можем задать такой порядок величин: $\alpha \geq \beta \geq \gamma$. Рисунок 2.6 дает приблизительную картину изменения функции $f(u)$, когда все корни различны (кривая *A*), когда $\beta = \gamma$ (кривая *B*) и когда $\beta = \alpha$ (кривая *C*). Кривая *B* касается оси u

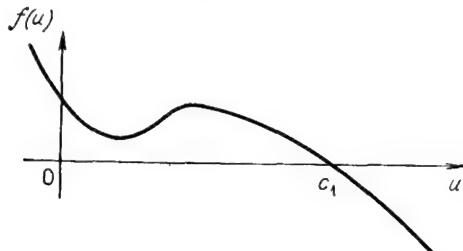


Рис. 2.5. Приблизительный график функции $f(u)$, когда она имеет только один вещественный корень.

в точке γ , а кривая *C* касается оси u в точке α . Далее для определения значений параметров c , A и B в выражении для $f(u)$ используются следующие выражения:

$$c = \frac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma), \quad A = -\frac{1}{6}(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha), \quad B = \frac{1}{6}\alpha\beta\gamma. \quad (2.44)$$

Выражая $f(u)$ через корни α , β и γ , получаем

$$f(u) = (u - \gamma)(u - \beta)(\alpha - u). \quad (2.45)$$

Поскольку решение должно быть вещественным и ограниченным, мы должны ограничить u между β и α для кривой *A* и

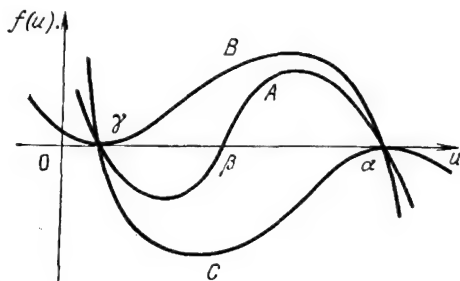


Рис. 2.6. Приблизительный график функции $f(u)$, когда все три корня вещественны: *A*) корни различны (кноидальная волна); *B*) $\beta = \gamma$ (уединенная волна); *C*) $\beta = \alpha$ (постоянное решение $u \rightarrow \alpha$).

между $\beta = \gamma$ и α для кривой *B*. Для кривой *C* допустимы значения $u \leq \gamma$, но в этом случае, как и в случае (1), ограниченное решение невозможно. Однако обсуждение случая, когда $\beta \rightarrow \alpha$, оказывается особенно интересным.

Начнем с вывода достаточных условий, при которых $f(u)$ имеет три вещественных корня. Легко проверить, что

$$c^2 + 2A = \{(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2\}/18,$$

поэтому если α, β и γ вещественны, то

$$c^2 + 2A \geq 0. \quad (2.46)$$

Теперь заметим, что $f(u)$ достигает положительного максимума между β и α и отрицательного минимума между γ и β . Предельные значения $f(u)$ достигаются при $u = c \pm \sqrt{c^2 + 2A}$. Поэтому

$$f\{c + \sqrt{c^2 + 2A}\} \geq 0, \quad f\{c - \sqrt{c^2 + 2A}\} \leq 0. \quad (2.47, 2.48)$$

Соотношения (2.46) — (2.48) дают требуемый ряд условий, которые обеспечивают вещественность нулей функции $f(u)$.

Рассмотрим теперь последовательно все три указанных выше случая более подробно.

Случай А: α, β, γ различны. Из уравнений (2.42) и (2.45) имеем

$$-\frac{du}{[(u - \gamma)(u - \beta)(\alpha - u)]^{1/2}} = \frac{d\xi}{(3K)^{1/2}}. \quad (2.49)$$

Полагая $\alpha - u = p^2$, приведем написанное выше уравнение к виду

$$\frac{d\xi}{(3K)^{1/2}} = \frac{2 dp}{\{[(\alpha - \gamma) - p^2]\{(\alpha - \beta) - p^2\}\}^{1/2}}. \quad (2.50)$$

Если теперь в последнем уравнении сделать замену $p = \sqrt{\alpha - \beta} q$, то оно примет следующую форму:

$$\sqrt{\alpha - \gamma} \frac{d\xi}{\sqrt{3K}} = \frac{2 dp}{\{(1 - s^2 q^2)(1 - q^2)\}^{1/2}}. \quad (2.51)$$

$$\text{где } s^2 = \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \gamma}, \quad q = \frac{p}{\sqrt{\alpha - \beta}} = \sqrt{\frac{\alpha - u}{\alpha - \beta}}. \quad (2.52)$$

Из введенного выше порядка нулей ясно, что $0 < s^2 < 1$. Как упоминалось выше, $\beta \leq u \leq \alpha$. Из (2.52) следует, что $u = \alpha$ соответствует $q = 0$, в то время как $u = \beta$ соответствует $q = 1$. Поэтому, выбирая $\xi = 0$ при $q = 0$, получаем

$$\xi = \sqrt{\frac{12K}{\alpha - \gamma}} \int_0^q \frac{dq}{\{(1 - s^2 q^2)(1 - q^2)\}^{1/2}} = \quad (2.53a)$$

$$= \sqrt{\frac{12K}{\alpha - \gamma}} \operatorname{sn}^{-1}(q, s), \quad (2.53b)$$

$$\text{или } u(\xi) = \beta + (\alpha - \beta) \operatorname{cn}^2 \left[\xi \sqrt{\frac{\alpha - \gamma}{12K}}, s \right], \quad (2.54)$$

где sn и cn — эллиптические функции Якоби (sn^{-1} — функция, обратная к sn). Из (2.53б) получим период P функции $u(\xi)$ по координате ξ :

$$P = 2 \sqrt{\frac{12K}{\alpha - \gamma}} \int_0^1 \frac{dq}{\{(1 - s^2 q^2)(1 - q^2)\}^{1/2}} = 4 \sqrt{\frac{3K}{\alpha - \gamma}} K(s), \quad (2.55)$$

где $K(s)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Заметим, что в этом случае ограниченное решение уравнения КдФ описывает периодическую волну, период которой может быть определен. Из-за наличия функции sn в выражении $u(\xi)$ соответствующая волна называется *кноидальной*.

Случай В: $\gamma = \beta \neq \alpha$. Здесь u должно быть заключено между γ и α , поскольку решение должно быть ограниченным и вещественным. Из уравнений (2.42) и (2.45) при $\gamma = \beta$ получим

$$d\xi = \sqrt{3K} \frac{du}{(u - \gamma) \sqrt{\alpha - u}}, \quad (2.56)$$

что после интегрирования дает

$$u(\xi) = \gamma + (\alpha - \gamma) \operatorname{sech}^2 \{ \sqrt{(\alpha - \gamma)/12K} \xi \}. \quad (2.57)$$

Максимум u перемещается и определяется из условия равенства нулю переменной

$$\xi = x - (2\gamma + \alpha)t/3. \quad (2.58)$$

Период волны P задается выражением (2.55):

$$P = 4 \sqrt{\frac{3K}{\alpha - \gamma}} \int_0^1 \frac{dq}{1 - q^2} = \infty. \quad (2.59)$$

При $\xi \rightarrow \pm \infty$ из (2.57) получаем $u \rightarrow \gamma$. Таким образом, $\gamma = u_\infty$ означает однородное состояние при $\xi \rightarrow \pm \infty$. Мы можем обозначить $\alpha - \gamma$ через a и интерпретировать a как амплитуду волны. Поэтому предпочтительней записать (2.57) в виде

$$u(\xi) = u_\infty + a \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{a/12K} \{x - (a_\infty + a/3)t\} \right]. \quad (2.60)$$

Сделаем следующие важные замечания о полученном решении:

1. Скорость волны относительно однородного состояния в бесконечности пропорциональна амплитуде a . Это обусловлено эффектом нелинейности волны.

2. Ширина волны, равная $2\pi \sqrt{12K/a}$, обратно пропорциональна квадратному корню из амплитуды.

3. Ширина волны пропорциональна квадратному корню из K ; роль K заключается в расплывании волны. Дисперсия нелинейной волны проявляется в расплывании волны.

4. Амплитуда не зависит от однородного состояния u_∞ при $\xi = \pm \infty$.

В бегущей волне, представляемой уравнением (2.60), переход от состояния покоя при $\xi \rightarrow -\infty$ к состоянию покоя при $\xi \rightarrow +\infty$ локализуется в окрестности $\xi = 0$, как показано

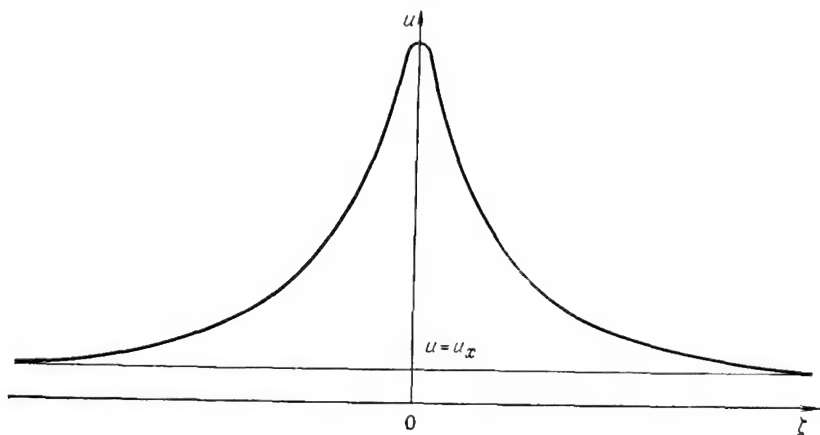


Рис. 2.7. Профиль уединенной волны, приближающийся к постоянным состояниям при $\xi = \pm \infty$ и локализованной вблизи $\xi = 0$.

на рис. 2.7. Мы будем называть такой процесс *уединенной волной*.

Случай С: $\gamma \neq \beta = \alpha$. Здесь $f(u) \geq 0$, если $u \leq \gamma$, и нетрудно показать, что в этом случае ограниченное решение невозможно. Мы рассмотрим случай, когда $\beta \rightarrow \alpha$, но не равно строго α . Так как теперь $s^2 \rightarrow 0$, то из случая А мы сразу получим соотношение

$$u(\xi) \approx \alpha - (\alpha - \beta) \sin^2 \left[\sqrt{(\alpha - \gamma)/12K} (\xi - \xi_0) \right], \quad (2.61)$$

которое в пределе стремится к постоянному значению α , а период

$$P \rightarrow 2\pi \sqrt{3K/(\alpha - \gamma)}. \quad (2.62)$$

Таким образом, мы рассматриваем случай $\beta \rightarrow \alpha$ как предельный случай синусоидальной волны с конечным периодом, заданным выражением (2.62).

2.5. Уединенные волны: солитоны

В следующей главе мы изучим одно из наиболее удивительных свойств уединенной волны, состоящее в том, что две различные уединенные волны (т. е. волны с определенными амплитудами и поэтому с определенными скоростями) после взаимодействия, согласно нелинейному уравнению КдФ, входят из области взаимодействия без изменения формы. Это свойство характерно для линейных волн. Такое поведение уединенных волн напоминает поведение гладких твердых частиц при столкновении. В связи с этим уединенным (solitary) волнам было дано название *солитонов* (solitons).

Солитоны могут иметь большое практическое применение. Рассмотрим импульс, несущий некоторую информацию. Если он подвергается при этом действию больших диссипативных сил, то придет к месту назначения сильно ослабленным. Аналогично импульс, испытывающий при распространении значительную дисперсию, придет к месту назначения столь размытым и искаженным, что информация будет полностью потеряна. Однако если импульс распространяется в виде солитона, то он может переносить информацию на большие расстояния без искажений и без заметной потери интенсивности.

Первое появившееся в печати свидетельство о существовании уединенных волн имеется в статье Скотт-Рассела [1844]. Ниже мы воспроизводим из этой статьи интересное и захватывающее описание уединенной волны, которую он случайно увидел.

Однажды я наблюдал движение лодки, которую быстро тянула вдоль узкого канала пара лошадей. Внезапно лодка остановилась, однако этого не случилось с массой воды, приведенной лодкой в движение. Вода сначала собралась около носа судна, где она забулжила, и затем неожиданно с большой скоростью выкатилась вперед, приняв форму уединенного крупного возвышения — округлого, гладкого и резко очерченного, которое продолжало свой путь вдоль канала без заметного изменения формы и скорости. Я последовал за ним верхом и, нагнав его, обнаружил, что оно все еще катится со скоростью 8—9 миль в час, сохраняя первоначальную форму: оно было длиной порядка 30 футов и высотой 1—1,5 фута; его высота постепенно уменьшалась. Я гнался за ним пару миль, пока не потерял из виду в извилинах канала. Такова была моя первая случайная встреча в августе 1834 г. с этим редким и красивым явлением¹⁾.

2.6. Некоторые другие уравнения эволюции, порождающие солитоны

Имеются также другие уравнения эволюции, допускающие солитонные решения. Выпишем несколько таких уравнений.

¹⁾ Это описание, сделанное известным английским кораблестроителем, относится к одной из лодок, с помощью которых на конной тяге со скоростью 11—14 км/ч осуществлялось пассажирское сообщение по сети неглубоких каналов (1—1,5 м), покрывавших Англию в прошлом веке. — *Прим. перев.*

2.6.1 Обобщенное уравнение КдФ

Обобщенное уравнение КдФ

$$\varphi_t + \alpha \varphi^p \varphi_x + \underbrace{\varphi_x \dots x}_{2r+1 \text{ раз}} = 0,$$

где $\alpha = \text{const}$, а p , r — неотрицательные целые числа, имеет следующие важные частные случаи, допускающие решение в виде уединенной волны:

(1) $r = 0$, $p = 0$: бездисперсное линейное уравнение, дающее солитонное решение;

(2) $r = 1$, p — нечетное число: уравнение допускает солитонное решение с sign (амплитуда волны) = $\text{sign}(\alpha)$;

(3) $r = 1$, p — четное число: уравнение допускает либо солитонную волну сжатия с sign (амплитуда волны) = $\text{sign}(\alpha)$, либо солитонную волну разрежения с sign (амплитуда волны) = $-\text{sign}(\alpha)$;

(4) $r = 1$, $p = 2$: уравнение описывает акустическую волну в некоторых ангармонических решетках (Забуски [1967]) и альфвеновскую волну в бесстолкновительной плазме (Какутани и Оно [1973]);

(5) регуляризованное уравнение КдФ (Бенджамин, Бона и Магони [1972])

$$\varphi_t + \varphi_x + \varphi \varphi_x - \varphi_{xxt} = 0.$$

2.6.2 Уравнение Буссинеска

Уравнение Буссинеска

$$\varphi_{xx} - \varphi_{tt} + 6(\varphi^2)_{xx} + \varphi_{xxxx} = 0$$

описывает волны в мелкой воде, распространяющиеся в обоих направлениях (Тода и Вадати [1973], Прасад и Равиндран [1977]), одномерную нелинейную волну в решетке (Забуски [1967]). Недавно Хирота [1973] с помощью численных расчетов показал, что это уравнение обладает солитонными решениями.

2.6.3. Уравнение sin-Гордона

Уравнение sin-Гордона $\varphi_{xx} - \varphi_{tt} = \sin \varphi$ описывает распространение дислокаций в кристалле (Френкель и Конторова [1939], Кохендёрфер и Сигер [1950] и Сигер, Донт и Кохендёрфер [1953]), движение стенок Блоха в магнитных кристаллах (Бин и де Блуа [1959], Дёринг [1948], Меников [1972]), распространение «скошенной волны» вдоль липидной мембраны (Фергасон и Браун [1968]), унитарную теорию элементарных частиц (Энц [1963], Розен и Розеншток

[1952] и Скирме [1958, 1961]) и распространение магнитных потоков в линии Джозефсона (Кулик [1966], Лебволь и Штефен [1967], Скотт [1967], Скотт и Джонсон [1969], Скотт [1970]).

2.6.4 Нелинейное уравнение цепочки

Нелинейное уравнение цепочки

$$m^2 y_n / dt^2 = a [\exp(br_n) - \exp(-br_{n+1})], \quad n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots;$$

$$a, b = \text{const}, \quad r_n = y_n - y_{n-1},$$

называемое уравнением Тоды (Тода [1967а, 1967б, 1968, 1969, 1970], Тода и Вадати [1973]). Оно описывает движение в одномерной цепочке масс, взаимодействующих через нелинейный потенциал

$$\psi(r_n) = (a/b) \exp(-br_n) + ar_n - a/b.$$

Изменяя величины a и b , можно перейти от линейного случая ($a \rightarrow \infty, b \rightarrow 0, ab$ конечно) к случаю твердых сфер ($b \rightarrow \infty, a \rightarrow 0, ab$ конечно).

2.6.5. Нелинейное уравнение Шредингера

Нелинейное уравнение Шредингера $\varphi_{xx} + i\varphi_t + K|\varphi|^2\varphi = 0$ описывает стационарное двумерное самофокусирование плоской волны (Келли [1965], Таланов [1965], Беспалов и Таланов [1966]), одномерную самомодуляцию монохроматической волны (Таниuti и Васими [1968], Асано, Таниuti и Ядзима [1969], Карпман и Крускал [1968], Хасегава и Тапперт [1973]), явление самозахвата (самоканализации) в нелинейной оптике (Карпман и Крускал [1968]), распространение теплового импульса в твердом теле (Тапперт и Варма [1970]), ленгмюровские волны в плазме (Фултон [1972], Итикава, Имамура и Таниuti [1972], Симичу и Итикава [1972]), а также относится к уравнению Гинзбурга — Ландау в теории сверхпроводимости (де Жен [1966]).

2.6.6. Уравнение Хироты

Уравнение Хироты

$$i\varphi_t + i3\alpha|\varphi|^2\varphi_x + \rho\varphi_{xx} + i\sigma\varphi_{xxx} + \delta|\varphi|^2\varphi = 0,$$

где $\alpha\rho = \sigma\delta$. Это уравнение сводится к нелинейному уравнению Шредингера при $\alpha = \sigma = 0$ и модифицированному уравнению КдФ $\varphi_t + \alpha\varphi^2\varphi_x + \varphi_{xxx} = 0$ при $\rho = \delta = 0$, а при $\alpha = \delta = 0$ оно сводится к линейному уравнению $i\varphi_t + \rho\varphi_{xx} + i\sigma\varphi_{xxx} = 0$. Хирота [1973] получил N -солитонное решение этого уравнения.

2.6.7. Уравнение Борна — Инфельда

Это уравнение записывается в виде

$$\Phi_{xx}(1 - \Phi_i^2) + 2\Phi_x\Phi_t\Phi_{xt} - (1 + \Phi_x^2)\Phi_{tt} = 0.$$

Борн и Инфельд получили это уравнение в трехмерных пространственных координатах в качестве нелинейной модификации уравнений Максвелла, что позволяет представить электрон естественным образом в виде сингулярности (Борн и Инфельд [1934, 1935], Фенберг [1935], Ольсен [1972], Портер [1972]).

2.6.8. Уравнение самоиндуцированной прозрачности

Макколл и Хан [1965] обнаружили путем вычислений, что ультракороткие импульсы света могут проходить сквозь резонансную двухуровневую оптическую среду, как сквозь прозрачную среду. Этот эффект был широко изучен (Макколл и Хан [1967, 1969]) и имеет следующее физическое объяснение. Временной интервал ультракороткого импульса (10^{-9} — 10^{-19} с) оказывается меньше продолжительности фазовой памяти атомных уровней оптической среды. Поэтому наведенная поляризация может удерживать определенное соотношение фаз с падающим импульсом. В результате на фронте импульса возникает обращение атомной населенности, а на спаде импульса за счет индуцированной эмиссии происходит переход в основное состояние. Таким образом, энергия, передаваемая квантовой системе передним фронтом импульса, отбирается от нее в конце импульса обратно. В результате при выполнении соответствующих условий, относящихся к степени когерентности и интенсивности, возникает импульс неизменного профиля, распространяющийся без затухания со скоростью, которая может быть на два — три порядка меньше фазовой скорости света в данной среде.

Рассмотрим квантовый двухуровневый ансамбль атомов. Световая волна поляризует атомы, которые, действуя совместно, превращаются в источник электромагнитного поля. Пусть атомы распределены однородно с плотностью n_0 , а напряженность электрического поля $\mathcal{E}(x, t) = E(x, t) \cos(k_0x - \omega_0t)$, где предполагается, что огибающая $E(x, t)$ является медленно меняющейся функцией по сравнению с несущей $\cos(k_0x - \omega_0t)$. Тогда уравнения Максвелла сведутся к виду $E_t + E_x = \langle P \rangle$. Здесь ради удобства скорость света и другие физические параметры положены равными единице. С общим случаем читатель может познакомиться в прекрасной обзорной статье Ламба [1971].

Рассмотрим двухуровневый атом с разностью уровней энергии $\omega = \omega_0 - \Delta\omega$ и обозначим поляризацию в (x, t) , обусловленную атомом, через $p(\Delta\omega, x, t)$. Ее можно приближенно разложить на компоненты, находящиеся в фазе и со сдвигом на 90° по отношению к несущей электромагнитной волне:

$$p(\Delta\omega, x, t) = P(\Delta\omega, x, t) \sin(k_0 x - \omega_0 t) + \\ + Q(\Delta\omega, x, t) \cos(k_0 x - \omega_0 t).$$

Теперь уравнение Шредингера для рассматриваемого атома сводится к уравнениям Блоха для огибающих функций P и Q :

$$P_t = EM - \Delta\omega Q, \quad Q_t = \Delta\omega P, \quad M_t = -EP,$$

где $M(\Delta\omega, x, t)$ — инверсия населенности в одиночном атоме. Мы можем теперь определить величину

$$\langle P \rangle = n_0 \int_{-\infty}^{\infty} g(\Delta\omega) P(\Delta\omega, x, t) d\Delta\omega,$$

где n_0 — концентрация атомов, а функция $g(\Delta\omega)$ описывает неопределенность энергетических уровней.

Как показали эксперименты и численные расчеты, решение приведенной выше системы уравнений распадается на последовательность отдельных когерентных оптических импульсов.

ЛИТЕРАТУРА

Уравнение Бюргерса

Бейтмен (Bateman H.)

- [1915] Some recent researches on the motion of fluids. — Mon. Weath. Rev., v. 43, p. 163—170.

Бентон, Плацман (Benton E. R., Platzman G. W.)

- [1972] A table of solutions of the one-dimensional Burgers equation. — Quart. Appl. Math., v. 30, p. 195—212.

Бюргерс (Burgers J. M.)

- [1939] Mathematical examples illustrating relations occurring in the theory of turbulent fluid motion. — Trans. Roy. Neth. Acad. Sci., v. 17, p. 1—53.

- [1940] Application of a model system to illustrate some points of the statistical theory of free turbulence. — Proc. Roy. Neth. Acad. Sci., v. 43, p. 2—12.

Коул (Cole J. D.)

- [1951] On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics. — Quart. Appl. Math., v. 9, p. 225—236.

Лайтхилл (Lighthill M. J.)

- [1956] Viscosity effects in sound waves on finite amplitude. — In: Surveys in mechanics (eds. G. K. Batchelor and R. M. Davies). — Cambridge University Press, p. 250—351.

Лейбович, Сибасс (Leibovich S., Seebass R.)

- [1974] Nonlinear waves, Chapter 4. — New York: Cornell University

- Press. [Имеется перевод: Лейбович С., Сибасс А. Нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.]
- Хопф (Hopf E.)
[1950] The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$. — *Communs Pure and Appl. Math.*, v. 3, p. 201—230.
- Чу (Chu C. W.)
[1965] A class of reducible systems of quasi-linear partial differential equations. — *Quart. Appl. Math.*, v. 23, p. 275—278.
- Швец М. Е., Мелешко В. П.
[1965] Численный алгоритм решения системы уравнений гидродинамики атмосферы. — *Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана*, т. 1, № 9, с. 893—896.
- Эймс (Ames W. F.)
[1965] *Nonlinear partial differential equations in engineering*. — New York: Academic Press.

Уравнение КдФ

- Бенджамин (Benjamin T. B.)
[1972] The stability of solitary waves. — *Proc. Roy. Soc.*, v. A328, p. 153—183.
- Березин Ю. А., Карпман В. И.
[1966] О нелинейной эволюции возмущений в плазме и других диспергирующих средах. — *ЖЭТФ*, т. 51, с. 1557—1564.
- Джеффри, Какутани (Jeffrey A., Kakutani T.)
[1972] Weak nonlinear dispersive waves: a discussion centered around the Korteweg — de Vries equation. — *SIAM Rev.*, v. 14, p. 582—643.
- Забуски, Крускал (Zabusky N. J., Kruskal M. D.)
[1965] Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. — *Phys. Rev. Lett.*, v. 15, p. 240—243.
- Кадоццев Б. Б., Карпман В. И.
[1971] Нелинейные волны. — *УФН*, т. 103, с. 193—213.
- Меников (Menikoff A.)
[1972] The existence of unbounded solutions of the Korteweg — de Vries equation. — *Communs Pure and Appl. Math.*, v. 25, p. 407—432.
- Миура, Гарднер, Крускал (Miura R. M., Gardner C. S., Kruskal M. D.)
[1968] Korteweg — de Vries equation and generalization. II. Existence of conservation laws and constants of the motion. — *J. Math. Phys.*, v. 9, p. 1204—1209.
- Сьёберг (Sjoberg A.)
[1970] On the Korteweg — de Vries equation, existence and uniqueness. — *J. Math. Analysis and Appl.*, v. 29, p. 569—579.
- Скотт-Рассел (Scott-Russell J.)
[1844] Report on waves. — *Proc. Roy. Soc. Edinb.*, p. 319—320.
- Скотт, Чу, Маклафлин (Scott A. C., Chu F. Y. E., McLaughlin D. W.)
[1973] The soliton: a new concept in applied science. — *Prec. Instn. Elec. Engrs.*, v. 61, p. 1443—1483.
- Таниути, Вэй (Taniuti T., Wei C. C.)
[1968] Reductive perturbation method in nonlinear wave propagation. I. — *J. Phys. Soc. Japan*, v. 24, p. 941—966.

Обобщенное уравнение КдФ

- Бенджамин, Бона, Магони (Benjamin T. B., Bona J. L., Mahony J. J.)
[1972] Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems. — *Philos. Trans. Roy. Soc.*, v. A272, p. 47—78.
- Забуски (Zabusky N. J.)
[1967] In: *Nonlinear partial differential equations* (ed. W. Ames). — New York: Academic Press, p. 223—258.

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПЕРЕВОДЧИКОМ

Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д.

[1971] Уравнение Кортевега — де Вриза — вполне интегрируемая гамильтонова система. — Функци. анализ, т. 5, № 4, с. 18—27.

Новиков С. П.

[1974] Периодическая задача для уравнения Кортевега — де Вриза. — Функци. анализ, 1974, т. 8, № 3, с. 54—66.

Уравнение Буссинеска

Забуски (Zabusky N. J.)

[1967] In: Nonlinear waves (ed. W. Ames). — New York: Academic Press, p. 223—258.

Прасад, Равиндран (Prasad P., Ravindran R.)

[1977] A theory of nonlinear waves in multi-dimensions: with special reference to surface water waves. — J. Inst. Math. and its Appl., v. 20, p. 9—20.

Тода, Вадати (Toda M., Wadati M.)

[1973] A solution and two solitons in an exponential lattice and related equations. — J. Phys. Soc. Japan., v. 34, p. 18—25.

Хирота (Hirota R.)

[1973] Exact N -soliton solutions of the wave equation of long waves in shallow-water and in nonlinear lattices. — J. Math. Phys., v. 14, p. 810—814.

Уравнение sin-Гордона

Бин, де Блуа (Bean C. P., de Blois R. W.)

[1959] Ferromagnetic domain wall as a pseudorelativistic entity. — Bull. Amer. Phys. Soc., v. 4, p. 53.

Дёринг (Döring W.)

[1948] Über die Trägheit der Wände Zwischen weissen Berzirken. — Z. Naturforsch., v. 31, p. 373—379.

Кохендёрфер, Сигер (Kochendörfer A., Seeger A.)

[1950] Theorie der Versetzungen in eindimensionalen Atomreihen. I. Periodisch angeordnete Versetzungen. — Z. Phys., v. 127, p. 533—550.

Кулик И. О.

[1966] О распространении волн в туннельном переходе Джозефсона при наличии вихрей и электродинамика слабой проводимости. — ЖЭТФ, т. 51, № 6, 1952—1969.

Лебволь, Штефен (Lebwohl P., Stephen M. J.)

[1967] Properties of vortex lines in superconducting barriers. — Phys. Rev., v. 163, p. 376—379.

Меников (Menikoff A.)

[1972] The existence of unbounded solutions of the Korteweg — de Vries equation. — Commun. Pure and Appl. Math., v. 25, p. 407—432.

Розен, Розеншток (Rosen N., Rosenstock H. B.)

[1952] The force between particles in a nonlinear field theory. — Phys. Rev., v. 85, p. 257—259.

Сигер, Донт, Кохендёрфер (Seeger A., Donth H., Kochendörfer A.)

[1953] Theorie der Versetzungen in eindimensionalen Atomreihen. II. Beliebige angeordnete und beschleunigte Versetzungen. — Z. Phys., v. 134, p. 173—193.

Скирме (Skyrme T. H. R.)

[1958] A nonlinear theory of strong interactions. — Proc. Roy. Soc., v. A247, p. 260—278.

- [1961] Particle states of a quantized field. — Proc. Roy. Soc., v. A262, p. 237—245.
- СКОТТ (Scott A. C.)
- [1967] Steady propagation on long Josephson junctions. — Bull. Amer. Phys. Soc., v. 12, 308—309.
- [1970] Propagation of flux on a long Josephson tunnel junction. — Nuovo Cim., v. 69B, p. 241—261.
- СКОТТ, ДЖОНСОН (Scott A. C., Johnson W. J.)
- [1969] Internal flux motion in large Josephson junctions. — Appl. Phys. Lett., v. 14, 316—318.
- ФЕРГАСОН, БРАУН (Ferguson J. L., Brown G. H.)
- [1968] Liquid crystals and living systems. — J. Amer. Oil Chem. Soc., v. 45, p. 120—127.
- ФРЕНКЕЛЬ, КОНТОРОВА (Frenkel J., Kontorova T.)
- [1939] On the theory of plastic deformation and twinning. — Phys. Z. USSR, v. 1, p. 137—149.
- ЭНЦ (Enz U.)
- [1963] Discrete mass, elementary length, and topological invariant as a consequence of a relativistic invariant variational principle. — Phys. Rev., v. 131, p. 1392—1394.

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПЕРЕВОДЧИКОМ

Захаров В. Е., Шабат А. Б.

- [1971] Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах. — ЖЭТФ, т. 61, с. 118—134.

Нелинейное уравнение цепочки

Тода (Toda M.)

- [1967a] Vibration of a chain with nonlinear interaction. — J. Phys. Soc. Japan, v. 22, p. 431—436.
- [1967b] Wave propagation in anharmonic lattices. — J. Phys. Soc. Japan, v. 23, p. 501—506.
- [1968, 1969] Mechanics and statistics of nonlinear chains. — Proc. Internat. Conference on Statistical Mechanics, Kyoto, Japan; см. также: J. Phys. Soc. Japan, v. 26, Suppl., p. 235—237.
- [1970] Waves in nonlinear lattices. — Prog. Theor. Phys., v. 45, Suppl., p. 174—200.

Тода, Вадати (Toda M., Wadati M.)

- [1973] A soliton and two solitons in an exponential lattice and related equations. — J. Phys. Soc. Japan, v. 34, p. 18—25.

Нелинейное уравнение Шредингера

Асано, Таниути, Ядзима (Asano N., Taniuti T., Yajima N.)

- [1969] Perturbation method for nonlinear wave modulation, II. — J. Math. Phys., v. 10, p. 2020—2024.

Беспалов В. И., Таланов В. И.

- [1966] О нитевидной структуре пучков света в нелинейных жидкостях. — Письма ЖЭТФ, т. 3, № 12, с. 471—476.

де Жен (de Gennes P. G.)

- [1966] Superconductivity of metals and alloys, Chapter 6. — New York: Benjamin.

Итикава, Имамуре, Таниути (Ichikawa V. H., Imamura T., Taniuti T.)

- [1972] Nonlinear wave modulation in collisionless plasma. — J. Phys. Soc. Japan, v. 33, p. 189—197.

Карпман В. И., Крускал Е. М.

- [1968] О модуляции волн в нелинейных диспергирующих средах. — ЖЭТФ, т. 55, № 2(8), с. 530—538.

Келли (Kelley P. L.)

- [1965] Self-focusing of optic beams. — Phys. Rev. Lett., v. 15, p. 1005—1008.

Равиндран, Прасад (Ravindran R., Prasad P.)

- [1979] A mathematical analysis of nonlinear waves in a fluid filled viscoelastic tube. — Acta. Mech., v. 31, p. 253—280.

Симицу, Итикава (Shimizu K., Ichikawa V. H.)

- [1972] Automodulation of ion oscillation modes in plasma. — J. Phys. Soc. Japan, v. 33, p. 789—792.

Таланов В. И.

- [1965] О самофокусирующихся новых пучках в нелинейной среде. — ЖЭТФ, т. 2, № 5, с. 218—222.

Таниути, Васими (Taniuti T., Washimi H.)

- [1968] Self-trapping and instability of hydromagnetic waves along the magnetic field in a cold plasma. — Phys. Rev. Lett., v. 21, p. 209—212.

Тапперт, Варма (Tappert F., Varma C. M.)

- [1970] Asymptotic theory of self-trapping of heat pulses in solids. — Phys. Rev. Lett., v. 25, p. 1108—1111.

Фултон (Fulton T. A.)

- [1972] Aspects of vortices in long Josephson junctions. — Bull. Amer. Phys. Soc., v. 17, p. 46.

Хасегава, Тапперт (Hasegawa A., Tappert F.)

- [1973] Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion. — Appl. Phys. Lett., v. 23, p. 142—144.

Уравнение Хироты

Хирота (Hirota R.)

- [1973] Exact envelope — soliton solutions of a nonlinear wave equation. — J. Math. Phys., v. 14, p. 805—809.

Уравнение Борна — Инфельда

Борн, Инфельд (Born M., Infeld L.)

- [1934] Foundation of a new field theory. — Proc. Roy. Soc., v. A144, p. 425—451.

- [1935] On the quantization of the new field equations. Part. 1. — Proc. Roy. Soc., v. A147, p. 522—546; Part 2. — Proc. Roy. Soc., v. A150, p. 141—166.

Ольсен (Olsen S. L.)

- [1972] On the quantization of the Born — Infeld theory. — Lett. Nuovo Cim., v. 5, p. 745—747.

Портер (Porter J. R.)

- [1972] Peeling and conservation laws in the Born — Infeld theory of electromagnetism. — Proc. Cambridge Philos. Soc., v. 72, p. 319—324.

Фенберг (Feenberg F.)

- [1935] On the Born — Infeld field theory of the electron. — Phys. Rev., v. 47, p. 148—157.

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПЕРЕВОДЧИКОМ

Барбашов Б. М., Черников Н. А.

- [1966] Решение и квантование нелинейной модели типа поля Борна — Инфельда. — ЖЭТФ, т. 50, с. 1296—1308.

Уравнение самоиндуцированной прозрачности

Ламб (Lamb G. L.)

[1971] Analytical descriptions of ultrashort optical pulse propagation in a resonant medium. — Rev. Mod. Phys., v. 43, p. 99—124.

Макколл, Хан (McCall S. L., Hahn E. L.)

[1965] Coherent light propagation through an inhomogeneously broadened 2-level system. — Bull. Amer. Phys. Soc., v. 10, p. 1189.

[1967] Self-induced transparency by pulsed coherent light. — Phys. Rev. Lett., v. 18, p. 908—911.

[1969] Self-induced transparency. — Phys. Rev., v. 183, p. 457—485.

Приложение IIА

УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ТЕЧЕНИЕ ГАЗА В ТРУБАХ
И ВОЛНЫ НА МЕЛКОЙ ВОДЕ ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНЫ

В этом приближении мы рассмотрим две физические задачи и приведем их волновые уравнения к общему виду. В следующем приложении (IIБ) мы опишем метод, с помощью которого это общее уравнение сводится к эталонному. Забегая вперед, заметим, что первая задача приводит к обобщенному уравнению Бюргерса, а вторая — к обобщенному уравнению КдФ. В гл. 1 и 2 было рассмотрено распространение волн в однородных средах. Мы умышленно выбрали две указанные выше задачи, в которых рассматриваются волны в неоднородных средах, чтобы подчеркнуть тот факт, что даже в случае распространения волн в неоднородной среде эталонные уравнения с переменными коэффициентами могут адекватно отобразить реальную физическую ситуацию.

Течение газа в трубах

Рассмотрим распространение волн в жидкости (газе), текущей по каналу (трубе) переменного сечения. Предположим, что все переменные, характеризующие поток, постоянны по сечению трубы, т. е. движение можем считать одномерным. Для них имеются следующие уравнения (Джеффри, Таниути [1964]).

Уравнение непрерывности

$$(\rho\sigma)_t + (u\rho\sigma)_x = 0, \quad (\text{IIA. 1})$$

где σ — площадь поперечного сечения канала с координатой x , ρ — плотность и u — скорость жидкости.

Уравнение движения

$$u_t + uu_x + (1/\rho) p_x - (1/\rho) \mu u_{xx} = 0, \quad (\text{IIA. 2})$$

где p — давление и μ — коэффициент вязкости.

Уравнение энергии

$$(\omega\sigma)_t + (q\sigma)_x = 0, \quad (\text{IIA. 3})$$

$$\text{где } \omega = 1/2 \rho u^2 + p/(\gamma - 1) \quad (\text{IIA. 4})$$

— плотность энергии, и

$$q = (\omega + p)u - \mu u_x - \chi T_x \quad (\text{IIA. 5})$$

— поток плотности энергии, γ — отношение теплоемкостей (считается постоянным), χ — теплопроводность.

Уравнение состояния. Будем предполагать, что между давлением, плотностью и температурой существует следующее соотношение:

$$p = p(\rho, T), \quad (\text{IIA. 6})$$

где T может быть выражено через p и ρ . Удобно считать $\rho\sigma = \bar{\rho}$, u и $\rho\sigma = \bar{\rho}$ зависимыми переменными и рассматривать их как элементы вектора-столбца U :

$$U = \begin{bmatrix} \bar{\rho} \\ u \\ \bar{p} \end{bmatrix}. \quad (\text{IIA. 7})$$

При этом введем

$$\bar{\mu} = \mu\sigma, \quad \bar{\chi} = \chi\sigma. \quad (\text{IIA. 8})$$

Средние значения этих величин будем считать постоянными. Рассматриваемые уравнения можно записать через переменные и параметры с чертой в следующем виде:

$$\bar{\rho}_t + u\bar{\rho}_x + \bar{\rho}u_x = 0, \quad (\text{IIA. 9})$$

$$u_t + uu_x + (1/\bar{\rho})\bar{\rho}_x - (\bar{p}/\bar{\rho})S_x - (\bar{\mu}/\bar{\rho})u_{xx} = 0, \quad (\text{IIA. 10})$$

$$\begin{aligned} \bar{p}_t + u\bar{p}_x + \gamma\bar{p}u_x + (\gamma - 1)u\bar{p}S_x - \bar{\mu}(\gamma - 1)u_x^2 - (\gamma - 1)\bar{\mu}_xu_{xx} - \\ - (\gamma - 1)\bar{\chi}[\bar{\rho}_x^2 T_{\bar{\rho}\bar{\rho}} + 2\bar{\rho}_x\bar{p}_x T_{\bar{\rho}\bar{p}} + \bar{p}_x^2 T_{\bar{p}\bar{p}} + T_{\bar{\rho}}\bar{\rho}_{xx} + T_{\bar{p}}\bar{p}_{xx}] - \\ - (\gamma - 1)\bar{\chi}_x[T_{\bar{\rho}}\bar{\rho}_x + T_{\bar{p}}\bar{p}_x] = 0. \end{aligned} \quad (\text{IIA. 11})$$

Внимательное исследование этих уравнений показывает, что их можно записать в следующем общем виде:

$$U_t + AU_x + \sum_{\beta=1}^s \prod_{\alpha=1}^p (H_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial t} + K_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial x}) U + BS_x = 0, \quad (\text{IIA. 12})$$

где $H_{\alpha}^{\beta} = 0$, так как в уравнениях (IIA.9) — (IIA.11) после выделения первого члена U_t производные по t отсутствуют, α принимает значения 1 и 2, поскольку в них имеются только

первая и вторая производные по x ($p = 2, s = 3$),

$$A = \begin{bmatrix} u & \bar{p} & 0 \\ 0 & u & 1/\bar{p} \\ 0 & \gamma\bar{p} & u \end{bmatrix}, \quad S = \ln \sigma, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\bar{p}/\bar{p} \\ (\gamma - 1)u\bar{p} \end{bmatrix},$$

$$K_1^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix}, \quad K_2^1 = \begin{bmatrix} \bar{p} & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & \bar{p} \end{bmatrix},$$

$$K_1^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_4 & 0 & C_4 \end{bmatrix}, \quad K_2^2 = \begin{bmatrix} \bar{p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{p} \end{bmatrix},$$

$$K_1^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_5 - C_1\bar{p} - C_4\bar{p} & -C_2u & C_6 - C_3\bar{p} - C_4\bar{p} \end{bmatrix}, \quad K_2^3 = I,$$

где I — единичная матрица третьего порядка, а

$$C_1 = -(\gamma - 1)\bar{\chi}T_{\delta\bar{p}}, \quad C_2 = -(\gamma - 1)\bar{\mu},$$

$$C_3 = -(\gamma - 1)\bar{\chi}T_{\bar{p}\bar{p}}, \quad C_4 = -(\gamma - 1)\bar{\chi}T_{\bar{p}\delta},$$

$$C_5 = -(\gamma - 1)\bar{\chi}T_{\bar{p}}, \quad C_6 = -(\gamma - 1)\bar{\chi}T_{\bar{p}}.$$

Заметим, что мы пренебрегли зависимостями $\bar{\mu}$, $\bar{\chi}$, $T_{\bar{p}}$, $T_{\bar{p}}$, $T_{\delta\bar{p}}$, $T_{\bar{p}\bar{p}}$ от x .

Распространение волн на мелкой воде с неровным дном

Для длинных береговых волн Перегрин [1967] получил следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla h + \frac{1}{6} H^2 \frac{\partial}{\partial t} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \frac{1}{2} H \frac{\partial}{\partial t} \nabla [\nabla \cdot (H \mathbf{u})] = 0, \quad (\text{IIA. 13a})$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot [(H + h) \mathbf{u}] = 0, \quad (\text{IIA. 13b})$$

где \mathbf{u} — горизонтальная скорость, осредненная по вертикальному направлению, H — глубина при спокойной воде, зависящая от горизонтальной координаты, а h — амплитуда волны. Если ограничиться движением только по оси x , то эти уравнения примут вид

$$h_t + u h_x + (H + h) u_x + u H_x = 0, \quad (\text{IIA. 14a})$$

$$u_t + u u_x + h_x - \frac{1}{2} H (H u_t)_{xx} + \frac{1}{6} H^2 u_{txx} = 0. \quad (\text{IIA. 14b})$$

Заметим, что уравнение (IIA.14a) содержит только первые производные по x и t , однако уравнение (IIA.14b) содержит

производные третьего порядка, из которых производная по x повторяется дважды, а по t — только один раз. Эти замечания полезны для правильного выбора матриц H_a^β и K_a^β . Очевидно, здесь $p = 3$, когда мы превратим уравнения (IIA.14) в (IIA.12). При этом мы положим $U = \begin{bmatrix} h \\ u \end{bmatrix}$; и далее $s = 1$,

$$A = \begin{bmatrix} u & H + h \\ 1 & u \end{bmatrix}, \quad S = H, \quad B = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$H_1^1 = H_2^1 = 0, \quad H_3^1 = \begin{bmatrix} 0 & H \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$K_1^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1/2 H & 1/6 H^2 \end{bmatrix}, \quad K_2^1 = I, \quad K_3^1 = 0,$$

чтобы свести систему уравнений (IIA.14) к виду (IIA.12).

Оба приведенных выше примера распространения волн в неоднородной среде были рассмотрены Асано и Оно [1971]. В дополнение к двум этим примерам они рассмотрели также наклонное распространение магнитоакустической волны. Таниути и Вэй [1968] описали два примера распространения волн в однородной среде, а именно волн в движущемся газе и ионно-акустических волн. Используя метод сингулярных возмущений, они развили стройную теорию сведения данной системы уравнений в стандартной форме (IIA.12) без последнего члена, т. е. пренебрегая неоднородностью среды, к одному нелинейному уравнению в частных производных, причем это было сделано при предположениях слабой нелинейности, умеренности эффектов дисперсии и диссипации, а также большой длины волны. Ниже (приложение IIB) для учета умеренной неоднородности мы обсудим теорию сведения в форме, предложенной Асано и Оно.

Другие исследователи для получения уравнений Бюргерса и КдФ (см., например, Лейбович и Сибасс [1972]) использовали «метод нескольких масштабов». Их метод является по существу модификацией процедуры, предложенной Таниути и Вэем [1968]. Прасад и Равиндран [1977] разработали более общий метод получения аналогичного эталонного уравнения для распространения изогнутых волн в многомерных средах.

ЛИТЕРАТУРА

- Асано, Оно (Asano N., Ono H.)
[1971] Nonlinear dispersive or dissipative waves. — J. Phys. Soc. Japan, v. 31, p. 1830—1836.
Джеффри, Таниути (Jeffrey A., Taniuti T.)
[1964] Nonlinear wave propagation. — New York: Academic Press.

- Лейбович С., Сибасс А. (Leibovich S., Seebass A. R.)
 [1972] Nonlinear waves, Chapter IV.— Ithaca: Cornell University Press.
 [Имеется перевод: Лейбович С., Сибасс А. Нелинейные волны.— М.: Мир, 1977.]
- Перегрин (Peregrine D. H.)
 [1967] Long waves on a beach.— J. Fluid Mech., v. 27, p. 815—827.
- Прасад, Равиндран (Prasad P., Ravindran R.)
 [1977] A theory of nonlinear waves in multi-dimensions: with special reference to surface water waves.— J. Inst. Math. and its Appl., v. 20, p. 9—20.
- Таниути, Вэй (Taniuti T., Wei C. C.)
 [1968] Reductive perturbation method in nonlinear wave propagation.— I.— J. Phys. Soc. Japan, v. 241, p. 941—946.

Приложение IIБ

Метод сведения к эталонному уравнению

Чтобы получить масштабы растяжения координат, рассмотрим сравнительно простой случай системы уравнений, описывающей распространение умеренно нелинейных волн в однородной среде:

$$U_t + AU_x + \sum_{\beta=1}^s \prod_{\alpha=1}^p \left(H_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial t} + K_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial x} \right) U = 0. \quad (\text{IIБ.1a})$$

Ниже мы рассмотрим более общую систему уравнений, описывающую распространение умеренно нелинейных волн в умеренно неоднородной среде:

$$U_t + AU_x + \sum_{\beta=1}^s \prod_{\alpha=1}^p \left(H_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial t} + K_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial x} \right) U + BS_x = 0, \quad (\text{IIБ.1б})$$

где последний член учитывает неоднородность среды согласно приложению IIА.

В уравнениях (IIБ.1б) U есть вектор-столбец с n компонентами u_1, u_2, \dots, u_n ($n \geq 2$), $A, H_{\alpha}^{\beta}, K_{\alpha}^{\beta}$ и B суть $(n \times n)$ -матрицы, элементы которых зависят от U и x в случае (IIБ.1б) и только от U — в случае (IIБ.1а), S — известная вектор-функция от x , $p \geq 2$; индексами x и t , как обычно, обозначены производные по пространственной координате и времени. Мы можем получить дисперсионное соотношение, рассматривая малые колебания U вблизи состояния равновесия U_0

$$U = U_0 + U_1 \exp \{i(kx - \omega t)\}. \quad (\text{IIБ.2})$$

Подставляя (IIБ.2) в (IIБ.1а) и оставляя только первую степень функции U_1 , получаем

$$\left\{ -(\omega/k)I + A_0 + i^{p-1}k^{p-1} \sum_{\beta=1}^s \prod_{\alpha=1}^p (K_{\alpha 0}^{\beta} - (\omega/k)H_{\alpha 0}^{\beta}) \right\} U_1 = 0, \quad (\text{IIБ.3})$$

где индекс 0 относится к значению $U = U_0$. Уравнение (IIБ.3) дает дисперсионное соотношение в виде

$$\left\{ -(\omega/k)I_0 + A_0 + i^{p-1}k^{p-1} \sum_{\beta=1}^s \prod_{\alpha=1}^p (K_{\alpha 0}^{\beta} - (\omega/k)H_{\alpha 0}^{\beta}) \right\} = 0. \quad (\text{IIБ.4})$$

Поскольку мы интересуемся *длинными* волнами, уравнение (IIБ.3) решается методом последовательных приближений в предположении, что k мало. Приближение нулевого порядка имеет вид

$$[-(\omega/k)I + A_0]U_0 = 0. \quad (\text{IIБ.5})$$

Дисперсионное соотношение нулевого порядка является n -й степенью относительно ω/k . Пусть λ_0 — невырожденное собственное значение матрицы A_0 , l_0 — левый собственный вектор, а r_0 — правый собственный вектор матрицы A_0 для $\lambda = \lambda_0$. Тогда в этом приближении имеем

$$\omega/k = \lambda_0, \quad U_0 = r_0 \quad (\text{точнее, скалярная величина, кратная } r_0). \quad (\text{IIБ.6})$$

Следующее приближение получим подстановкой $\lambda_0 = \omega/k$ и $r_0 = U_1$ в члены возмущений. В результате имеем

$$\left\{ -(\omega/k)I + A_0 + i^{p-1}k^{p-1} \sum_{\beta=1}^s \prod_{\alpha=1}^p (K_{\alpha 0}^{\beta} - \lambda_0 H_{\alpha 0}^{\beta}) \right\} r_0 = 0. \quad (\text{IIБ.7})$$

Умножая (IIБ.7) на левый собственный вектор l_0 , приходим к выражению

$$\frac{\omega}{k} = \lambda_0 + \frac{i^{p-1}k^{p-1}l_0}{l_0 r_0} \left\{ \sum_{\beta=1}^s \prod_{\alpha=1}^p (K_{\alpha 0}^{\beta} - \lambda_0 H_{\alpha 0}^{\beta}) \right\} r_0.$$

Продолжая аналогичным методом, можно получить более высокие порядки аппроксимации ω/k в виде ряда

$$\omega/k = \lambda_0 + C_1 k^{p-1} + C_2 k^{2(p-1)} + \dots, \quad (\text{IIБ.8})$$

$$\text{где } C_1 = \frac{i^{p-1}l_0 \left\{ \sum_{\beta=1}^s \prod_{\alpha=1}^p (K_{\alpha 0}^{\beta} - \lambda_0 H_{\alpha 0}^{\beta}) \right\} r_0}{l_0 r_0} \quad (\text{IIБ.9})$$

и т. д. Будем считать, что $C_1 \neq 0$. Характеристики уравнения (IIБ.1а), укороченного в результате пренебрежения

третьим членом, можно записать в форме

$$dx/dt = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + O(\varepsilon^2), \quad (\text{ИБ. 10})$$

где ε — малый (но не равный нулю) параметр, определяющий степень *нелинейности*. Сравнивая уравнения (ИБ.8) и (ИБ.10), мы видим, что между нелинейными эффектами и эффектами дисперсии (или диссипации) может возникнуть взаимодействие порядка ε , если

$$k \sim \varepsilon^a, \quad a = 1/(p-1). \quad (\text{ИБ. 11})$$

Из (ИБ.11) следует, что произведение ε^a на длину волны будет порядка единицы. Этот факт следует принимать во внимание при определении движущейся системы координат

$$\xi = \varepsilon^a (x - \lambda_0 t), \quad (\text{ИБ. 12})$$

применимой для слабо нелинейных длинных волн. Дифференцируя (ИБ.12) по x , получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dx} &= \varepsilon^a \left(1 - \lambda_0 / \frac{dx}{dt} \right) = \varepsilon^a \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + O(\varepsilon^2)} \right) = \\ &= \varepsilon^{a+1} \{ \lambda_1 / \lambda_0 + O(\varepsilon) \}, \end{aligned}$$

$$\text{или } d\xi/d\eta = \lambda_1 / \lambda_0 + O(\varepsilon),$$

$$\text{где } \eta = \varepsilon^{a+1} x. \quad (\text{ИБ. 13})$$

Это выражение определяет вторую «растягиваемую» переменную η , связанную с первой переменной ξ соотношением $d\xi/d\eta = O(1)$. Дифференцируя (ИБ.12) по t , получаем

$$d\xi/dt = \varepsilon^{a+1} [\lambda_1 + O(\varepsilon)], \quad (\text{ИБ. 14})$$

что приводит нас к определению переменной τ :

$$\tau = \varepsilon^{a+1} t, \quad (\text{ИБ. 15})$$

характеризуемой условием $d\xi/d\tau = O(1)$. Таким образом, мы имеем две группы растягиваемых переменных: 1) ξ , η и 2) ξ , τ . Очевидно, что в задаче на начальные условия следует использовать первую группу переменных, а для краевой задачи — вторую группу. Характеристики в «растягиваемых» переменных принимают вид

$$dx/dt = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_0 d\xi/d\eta \quad (\text{ИБ. 16})$$

при использовании (ИБ.12), (ИБ.13) и

$$dx/dt = \lambda_0 + d\xi/d\tau \quad (\text{ИБ. 17})$$

при использовании (ИБ.12), (ИБ.15). Из проведенного обсуждения ясно, что масштабы растягивания координат однозначно определены заданной системой уравнений (ИБ.1а). Если среда неоднородная, как это имеет место в большинстве

физических систем, становится существенным взаимодействие волн на неоднородностях.

Теперь мы применим нашу теорию к уравнению (ИБ.16), опираясь на метод растягивания координат, что было сделано Таниути и Вэем [1968] для однородной среды и модифицировано Асано и Оно для учета умеренной неоднородности [1971]. Стационарное состояние системы, отмеченное индексом 0, дается уравнением

$$A_0 U_{0x} + \sum_{\beta=1}^s \prod_{\alpha=1}^p \left(K_{\alpha 0}^{\beta} \frac{\partial}{\partial x} \right) U_0 + B_0 S_x = 0. \quad (\text{ИБ. 18})$$

Предположим, что U_0 и S — медленно меняющиеся функции x и их изменения могут быть адекватно учтены введением переменной η , определяемой формулой (ИБ.13) с $a = 1/(p-1)$. При изучении изменений U_0 и S с изменением x нам следует оценить порядок ϵ . Будем использовать «растягиваемые» переменные ξ и η , определенные заново следующими выражениями, учитывающими неоднородность среды:

$$\xi = \epsilon^a \left(\int dx / \lambda_0 - t \right), \quad \eta = \epsilon^{a+1} x, \quad (\text{ИБ. 19})$$

где λ_0 — невырожденное собственное значение матрицы A_0 , т. е. λ_0 является скоростью линейной волны. В растягиваемых координатах уравнение (ИБ.18) сводится к уравнению

$$A_0 U_{0\eta} + B_0 S_{\eta} = 0, \quad (\text{ИБ. 20})$$

если пренебречь членом порядка ϵ^p . Разложим U в окрестности U_0 по степеням ϵ :

$$U = U_0 + \epsilon U_1 + \epsilon^2 U_2 + \dots, \quad (\text{ИБ. 21a})$$

а коэффициенты матриц также разложим в ряды по степеням ϵ :

$$A = A_0 + \epsilon A_1 + \dots, \quad (\text{ИБ. 21б})$$

$$B = B_0 + \epsilon B_1 + \dots, \quad (\text{ИБ. 21в})$$

$$H_{\alpha}^{\beta} = H_{\alpha 0}^{\beta} + \epsilon H_{\alpha 1}^{\beta} + \dots, \quad (\text{ИБ. 21г})$$

$$K_{\alpha}^{\beta} = K_{\alpha 0}^{\beta} + \epsilon K_{\alpha 1}^{\beta} + \dots \quad (\text{ИБ. 21д})$$

Из (ИБ.19) имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\epsilon^a \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \epsilon^a \left(\frac{1}{\lambda_0} \frac{\partial}{\partial \xi} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \quad (\text{ИБ. 22})$$

и, заменяя производные по t производными по ξ , получаем $\partial U_0 / \partial \xi = 0$, $\partial S / \partial \xi = 0$. Переходя в (ИБ.16) к координатам ξ , η , подставляя выражения (ИБ.21) в полученное уравне-

ние и приравнивая по отдельности члены при одинаковых степенях ε , ε^2 , ... нулю, получаем

$$(A_0 - \lambda I) U_{1\xi} = 0, \quad (\text{ИБ. 23})$$

$$\begin{aligned} -U_{2\xi} + (1/\lambda_0) A_0 U_{2\xi} + (1/\lambda_0) A_1 U_{1\xi} + A_0 U_{1\eta} + A_1 U_{0\eta} + \\ + \sum_{\beta=1}^s \prod_{\alpha=1}^p (-H_{\alpha 0}^{\beta} + (1/\lambda) K_{\alpha 0}^{\beta}) U_{1\xi\xi \dots \xi} + B_1 S_{\eta} = 0 \end{aligned} \quad (\text{ИБ. 24})$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{p \text{ раз}}$

и т. д. Пусть r_0 — правый собственный вектор матрицы A для $\lambda = \lambda_0$, тогда

$$(A_0 - \lambda_0 I) r_0 = 0. \quad (\text{ИБ. 25})$$

Из (ИБ.23) и (ИБ.25) получаем

$$U_{1\xi} = r_0 \varphi_{\xi}, \quad (\text{ИБ. 26})$$

где φ — скалярная функция переменных ξ и η . Отсюда

$$U_1 = r_0 \varphi(\xi, \eta) + V(\eta), \quad (\text{ИБ. 27})$$

где V — произвольная функция только η . Поскольку произвольность нормы вектора r_0 не влияет на конечный результат, V однозначно определяется при условии, что U_1 и φ заданы при некотором значении ξ , скажем $\xi = \xi_0$. Тогда величина φ определяется из уравнения (ИБ.24). Умножая (ИБ.24) на левый собственный вектор l_0 матрицы A_0 для собственного значения λ_0 , после некоторых упрощений и использования (ИБ.25) — (ИБ.27) получаем

$$\begin{aligned} (1/\lambda_0) l_0 A_1 r_0 \varphi_{\xi} + \lambda_0 l_0 r_0 \varphi_{\eta} + \lambda_0 l_0 V_{\eta} + l_0 A_1 U_{0\eta} + \lambda_0 l_0 r_0 \varphi + \\ + l_0 \left\{ \sum_{\beta=1}^s \prod_{\alpha=1}^p (-H_{\alpha 0}^{\beta} + (1/\lambda_0) K_{\alpha 0}^{\beta}) \right\} r_0 \varphi_{\xi\xi \dots \xi} + l_0 B_1 S_{\eta} = 0. \end{aligned} \quad (\text{ИБ. 28})$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{p \text{ раз}}$

Это уравнение можно далее упростить, если заметить, что

$$\begin{aligned} A(u_1, u_2, \dots, u_n) = A(u_{10} + \varepsilon u_{11} + \dots + u_{20} + \varepsilon u_{21} + \dots + \\ + u_{n0} + \varepsilon u_{n1} + \dots) = A(U_0) + \sum_{i=1}^n (\partial A / \partial u_i)_0 \varepsilon u_{i1} \equiv A_0 + \varepsilon A_1. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} A_1 = (\nabla_U A)_0 U_1 = (\nabla_U A)_0 (r_0 \varphi + V) = \\ = \{(\nabla_U A)_0 r_0\} \varphi + (\nabla_U A)_0 V \end{aligned} \quad (\text{ИБ. 29})$$

и аналогичное выражение для B_1 . Подставляя (ИБ.29) в (ИБ.28) и перегруппировывая члены, получаем уравнение для φ :

$$\varphi_{\eta} + (\alpha \varphi + \alpha') \varphi_{\xi} + \beta \varphi_{\xi\xi \dots \xi} + \gamma \varphi + \gamma' = 0, \quad (\text{ИБ. 30})$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{p \text{ раз}}$

где

$$\alpha = \frac{l_0 \{(\nabla_U A)_0 r_0\} r_0}{\lambda_0^2 l_0 r_0}, \quad \alpha' = \frac{l_0 \{(\nabla_U A)_0 V\} r_0}{\lambda_0^2 l_0 r_0}, \quad (\text{ИБ. 31а, б})$$

$$\beta = \frac{l_0 \left\{ \sum_{\beta=1}^s \prod_{\alpha=1}^p (-H_{\alpha 0}^B + (1/\lambda_0) K_{\alpha 0}^B) \right\} r_0}{\lambda_0 l_0 r_0}, \quad (\text{ИБ. 31в})$$

$$\gamma = \frac{\lambda_0 l_0 r_0 \eta + l_0 [\{(\nabla_U A)_0 r_0\} U_{0\eta} + \{(\nabla_U B)_0 r_0\} S_\eta]}{\lambda_0 l_0 r_0}, \quad (\text{ИБ. 31г})$$

$$\gamma' = \frac{\lambda_0 l_0 V_\eta + l_0 [\{(\nabla_U A)_0 V\} U_{0\eta} + \{(\nabla_U B)_0 V\} S_\eta]}{\lambda_0 l_0 r_0}. \quad (\text{ИБ. 31д})$$

Таким образом, мы свели систему уравнений (ИБ.16) к одному уравнению относительно неизвестной φ . Между прочим заметим, что $\beta \neq 0$, если C_1 , определяемое (ИБ.9), не равно нулю. В своих работах Таниути и Вэй [1968] и Асано и Оно [1971] рассмотрели случай $C_1 = 0$.

Из уравнения (ИБ.30) можно удалить ряд членов при помощи преобразования

$$\psi = \exp \left(\int \gamma d\eta \right) \varphi + \int \gamma' \exp \left(\int \gamma d\eta \right) d\eta, \quad (\text{ИБ. 32а})$$

$$\xi = \xi - \int \alpha' d\eta + \int \left\{ \alpha \exp \left(- \int \gamma d\eta \right) \int \gamma' \exp \left(\int \gamma d\eta \right) d\eta \right\} d\eta. \quad (\text{ИБ. 32б})$$

где $\theta = \eta. \quad (\text{ИБ. 32в})$

При этом производится следующая замена переменных:

$$(\xi, \eta) \rightarrow (\xi, \theta), \quad (\text{ИБ. 33а})$$

$$\varphi \rightarrow \exp \left(- \int \gamma d\theta \right) \left\{ \psi(\xi, \theta) - \int \gamma' \exp \left(\int \gamma d\theta \right) d\theta \right\}, \quad (\text{ИБ. 33б})$$

а также замена производных по следующей схеме:

$$\partial/\partial \xi = \partial/\partial \xi, \quad (\text{ИБ. 33в})$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \theta} + \left[-\alpha' + \alpha \exp \left(- \int \gamma d\theta \right) \int \gamma' \exp \left(\int \gamma d\theta \right) d\theta \right] \frac{\partial}{\partial \xi}. \quad (\text{ИБ. 33г})$$

В результате преобразованное уравнение принимает удобный вид:

$$\psi_\theta + \alpha \exp \left(- \int \gamma d\theta \right) \psi \psi_\xi + B \underbrace{\psi \psi_\xi \dots \psi_\xi}_{p \text{ раз}} = 0, \quad (\text{ИБ. 34})$$

где коэффициенты зависят только от θ . Очевидно, что при $p = 2$ оно сводится к уравнению Бюргерса, а при $p = 3$ —

к уравнению КдФ (с переменными коэффициентами). Теперь мы применим изложенный выше метод к двум случаям, рассмотренным в приложении ИА.

Потоки в каналах

Стационарные решения задаются уравнениями

$$u_0 \bar{\rho}_{0\eta} + \bar{\rho}_0 u_{0\eta} = 0, \quad (\text{ИБ. 35a})$$

$$u_0 u_{0\eta} + (1/\bar{\rho}_0) \bar{\rho}_{0\eta} - \bar{\rho}_0 \sigma_\eta / (\bar{\rho}_0 \sigma) = 0, \quad (\text{ИБ. 35б})$$

$$\gamma \bar{\rho}_0 u_{0\eta} + u_0 \bar{\rho}_{0\eta} + (\gamma - 1) u_0 \bar{\rho}_0 (\sigma_\eta / \sigma) = 0. \quad (\text{ИБ. 35в})$$

Собственные значения матрицы

$$A_0 = \begin{bmatrix} u_0 - \lambda_0 & \bar{\rho}_0 & 0 \\ 0 & u_0 - \lambda_0 & 1/\bar{\rho}_0 \\ 0 & \gamma \bar{\rho}_0 & u_0 - \lambda_0 \end{bmatrix} \quad (\text{ИБ. 36})$$

задаются выражениями

$$\lambda_0 = u_0, \quad \lambda_0 = u_0 \pm a_0, \quad \text{где } a_0^2 = \gamma p_0 / \rho_0. \quad (\text{ИБ. 37})$$

Выберем собственное значение

$$\lambda_0 = u_0 + a_0. \quad (\text{ИБ. 38})$$

Соответствующие ему правый r_0 и левый l_0 собственные векторы выражаются в виде

$$r_0 = \begin{bmatrix} \bar{\rho}_0 \\ a_0 \\ \gamma \bar{\rho}_0 \end{bmatrix}; \quad l_0 = [0, \gamma \bar{\rho}_0, a_0]. \quad (\text{ИБ. 39})$$

Тогда

$$(\nabla_U A)_{U_0} r_0 = \begin{bmatrix} a_0 & \bar{\rho}_0 & 0 \\ 0 & a_0 & -1/\bar{\rho}_0 \\ 0 & \gamma^2 \bar{\rho}_0 & a_0 \end{bmatrix}, \quad (\text{ИБ. 40a})$$

$$l_0 r_0 = 2\gamma \bar{\rho}_0 a_0. \quad (\text{ИБ. 40б})$$

Следовательно, из (ИБ.31а) получим

$$\alpha = [(\gamma + 1)/2] (a_0/\lambda_0^2). \quad (\text{ИБ. 41})$$

Аналогично из (ИБ.31в) имеем

$$\beta = \frac{1}{2\gamma \bar{\rho}_0 \lambda_0^2} [(\gamma - 1) \bar{\chi} \{ (T_{\bar{\rho}})_0 \bar{\rho}_0 + (T_{\bar{\rho}})_0 \bar{\rho}_0 \} + \bar{\mu} a_0^2] \quad (\text{ИБ. 42})$$

и из (ИБ.31г)

$$\gamma^* = 1/2 a_{0\eta} / a_0 + 1/2 \bar{\rho}_{0\eta} / \bar{\rho}_0 + M_{0\eta} / (M_0 + 1), \quad (\text{ИБ. 43})$$

где вместо γ введено γ^* , чтобы избежать путаницы, а $M_0 = u_0/a_0$ — число Маха для невозмущенного потока, опреде-

ляемое из (ИБ.35а, б, в). Окончательно получим для переменной ψ

$$\psi = (a_0 \bar{\rho}_0 \sigma)^{1/2} (M_0 + 1) \varphi \quad (\text{ИБ. 44})$$

уравнение Бюргерса в форме

$$\psi_\eta + \alpha^* \psi \psi_\xi + \beta \psi_{\xi\xi} = 0, \quad (\text{ИБ. 45})$$

где

$$\alpha^* = [(\gamma + 1)/2] (a_0/\lambda_0^3) (a_0/\sigma \bar{\rho}_0)^{1/2}, \quad (\text{ИБ. 46})$$

а β зависит только от η .

Волны на мелкой воде при неровном дне

В случае $h = u = 0$ матрица

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & H \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{ИБ. 47})$$

поэтому

$$\lambda_0 = \pm H^{1/2}. \quad (\text{ИБ. 48})$$

Правый r_0 и левый l_0 собственные векторы имеют вид

$$r_0 = \begin{bmatrix} H \\ \lambda_0 \end{bmatrix}, \quad l_0 = [1, \lambda_0], \quad (\text{ИБ. 49})$$

а коэффициенты (ИБ.31) для $\lambda_0 = H^{1/2}$ задаются выражениями

$$\alpha = 3/2 (1/H^{1/2}), \quad \beta = 1/6 H^{1/2}, \quad \gamma = 5/4 (1/H) (dH/d\eta). \quad (\text{ИБ. 50а, б, в})$$

Уравнение КдФ для

$$\psi = H^{5/4} \varphi \quad (\text{ИБ. 51})$$

примет вид

$$\psi_\eta + (3/2 H^{-7/4}) \psi \psi_\xi + (1/6 H^{1/2}) \psi_{\xi\xi} = 0 \quad (\text{ИБ. 52})$$

с коэффициентами, зависящими только от η .

Между прочим заметим, что аналогичный метод сведения к эталонному уравнению применялся в других ситуациях, например для изучения поведения решений дифференциальных уравнений в окрестности критической точки (Куликовский, Слободкина [1967], Бхатнагар, Прасад [1971], Прасад [1973]) и для расчета эволюции импульса с искривленным волновым фронтом (Прасад [1975]).

ЛИТЕРАТУРА

- Бхатнагар, Прасад (Bhatnagar P. L., Prasad P.)
 [1970, 1971] Study of the self-similar and steady flows near singularities. Part I. — Proc. Roy. Soc., v. A315, p. 569—584;
 Part II. — ibid., v. A322, p. 45—62.

Куликовский А. Г., Слободкина Ф. А.

- [1967] Об устойчивости произвольных стационарных течений в окрестности точек перехода через скорость звука. — ПММ, в. 31, № 4, с. 593—602.

Прасад (Prasad P.)

- [1973] Nonlinear wave propagation on an arbitrary steady transonic flow. — J. Fluid Mech., v. 57, p. 721—737.
- [1975] Approximation of perturbation equations of a quasi-linear hyperbolic system in a neighbourhood of a bicharacteristic. — J. Math. Analysis and its Appl., v. 50, p. 470—482.

Взаимодействие солитонов

3.1. Введение

В гл. 2 было получено решение типа уединенной волны

$$u(x, t) = u_{\infty} + \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{a/12K} \{x - (u_{\infty} + a/3)t\} \right] \quad (3.1)$$

для уравнения КдФ

$$u_t + uu_x + Ku_{xxx} = 0, \quad (3.2)$$

когда два меньших корня β и γ кубического уравнения $du/d\xi \equiv f(u) = 0$ равны. В данной главе ради простоты мы рассмотрим уравнение КдФ в виде

$$u_t - buu_x + u_{xxx} = 0, \quad (3.3)$$

полученного из уравнения (3.2) путем следующего преобразования:

$$x \rightarrow K^{1/3}x, \quad u \rightarrow -6K^{1/3}u, \quad t \rightarrow t. \quad (3.4)$$

Предположим, что начальное условие $u(x, 0) = u_0(x)$ ограничено и трижды непрерывно дифференцируемо, и так же, как в гл. 2, поставим следующее граничное условие:

$$u(x, t) \text{ вместе со своими производными } \rightarrow 0 \text{ при } |x| \rightarrow \infty. \quad (3.5)$$

При этих условиях решение уравнения (3.3) типа уединенной волны имеет вид

$$u(x, t) = - (a^2/2) \operatorname{sech}^2 \{ (a/2)(x - a^2t) \}, \quad (3.6)$$

где a в (3.6) можно легко выразить через a и K в (3.1).

Цель этой главы состоит в изучении взаимодействия двух и более уединенных волн, что приведет нас к понятию солитона. Как уже упоминалось ранее, солитоны могут приобрести в будущем большое практическое применение.

3.2. Свойства уравнения Шредингера

Метод, который мы применим для изучения взаимодействия солитонов, основан на установлении связи между уравнением КдФ и одномерным стационарным уравнением Шредингера¹⁾. Основное достоинство такого подхода состоит в том, что мы сможем использовать свойства этого знаменитого

¹⁾ Называемым также уравнением Штурма — Лиувилля. — *Прим. перев.*

уравнения, детально изученного за последние тридцать — сорок лет.

Ниже мы напомним читателю только те свойства уравнения Шредингера, которые понадобятся для наших рассуждений. Для дальнейших ссылок мы отсылаем читателя к книге Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [1974].

Итак, рассмотрим стационарное одномерное уравнение Шредингера

$$\psi_{xx} + (\lambda - u(x))\psi = 0, \quad (3.7)$$

где $u(x)$ — потенциал, λ — значение энергии, $\psi(x)$ — волновая функция. В квантовой механике функция ψ в (3.7) является волновой функцией частицы, движущейся во внешнем поле с потенциальной энергией $u(x)$. Далее нам понадобятся следующие свойства решений уравнения (3.7):

1. Спектр λ может быть либо дискретным, либо непрерывным, либо смешанным.

2. Дискретные точки спектра λ , называемые собственными значениями, отрицательны и соответствуют устойчивым состояниям частиц, движущихся в ограниченных областях пространства. Будем обозначать собственные значения через

$$\lambda = -\kappa_1^2, \quad -\kappa_2^2, \quad \dots, \quad -\kappa_m^2, \quad \text{где } \kappa_i > 0; \quad (3.8)$$

величины κ_i также будем называть собственными значениями.

3. Непрерывные точки спектра отвечают неограниченному движению частицы, когда она достигает бесконечности. На достаточно больших расстояниях потенциальным полем $u(x)$ можно пренебречь и считать частицу свободной. Энергия свободной частицы положительна, следовательно, значения λ непрерывного спектра положительны. Обозначим их через

$$\lambda = k^2, \quad k > 0. \quad (3.9)$$

4. В классической механике частица с энергией E не может проникнуть в область $E < u(x)$. Однако в квантовой механике частица при движении в конечной области может находиться в областях пространства, где $E < u(x)$, хотя вероятность этого мала, но не равна нулю и быстро стремится к нулю при увеличении расстояния проникания в эту область.

5. Ни одно значение дискретного спектра не является вырожденным, т. е. каждому собственному значению соответствует одна и только одна собственная функция, как видно из следующего. Пусть две собственные функции соответствуют собственному значению λ . Тогда имеем

$$\psi_{1xx}/\psi_1 = u - \lambda = \psi_{2xx}/\psi_2, \quad \text{или} \quad \psi_{1xx}\psi_2 - \psi_{2xx}\psi_1 = 0,$$

т. е., интегрируя один раз, получаем $\psi_{1x}\psi_2 - \psi_{2x}\psi_1 = \text{const} = 0$ в силу граничного условия $\psi_{1,2} \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Следо-

вательно, имеем $\psi_{1x}/\psi_1 = \psi_{2x}/\psi_2$, откуда после интегрирования находим $\psi_1 = \text{const } \psi_2$, т. е. две собственные функции различаются лишь постоянным множителем. Непрерывный же спектр вырожден.

6. Расположим собственные значения по возрастающим величинам: $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_m$ и пусть ψ_n соответствует λ_n . Тогда $(n+1)$ -я собственная функция имеет n нулей в ограниченном интервале на оси x , в котором происходит движение частицы.

7. Рассмотрим потенциал $u(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Тогда при $|x| \rightarrow \infty$ уравнение Шредингера имеет следующую асимптотическую форму: $\psi_{xx} + \lambda\psi = 0$. Для дискретного спектра оно записывается в виде $\psi_{xx} - \kappa^2\psi = 0$ и имеет два независимых решения

$$\psi = c_{\pm} \exp(\pm \kappa x). \quad (3.10)$$

Ясно, что при $x \rightarrow \infty$ допустимым решением является $\exp(-\kappa x)$ и при $x \rightarrow -\infty$ решение есть $\exp(\kappa x)$. Для непрерывного спектра уравнение Шредингера принимает вид $\psi_{xx} + k^2\psi = 0$, и его два независимых решения даются формулами

$$\psi = a_{\pm}(k) \exp(\pm ikx). \quad (3.11)$$

Здесь решение $\exp(ikx)$ отвечает частице, движущейся в положительном направлении оси x , в то время как решение $\exp(-ikx)$ отвечает частице, движущейся в отрицательном направлении оси x .

8. В нашем рассмотрении, используя $u(x, t)$, определяемое уравнением КдФ (3.3) как потенциал в уравнении Шредингера, будем считать t параметром, так что собственные значения и собственные функции (а также элементы непрерывного спектра) уравнения Шредингера будут зависеть от t параметрически. Итак, мы можем записать

$$\lambda = \lambda(t), \quad \psi = \psi(x; t). \quad (3.12)$$

9. При $x \rightarrow \infty$ и $u \rightarrow 0$ волновую функцию непрерывного спектра можно представить асимптотически в виде линейной комбинации двух гармонических волн $\exp(\pm ikx)$ и аналогично при $x \rightarrow -\infty$. Рассмотрим волну, приходящую из $x = \infty$. Можно записать

$$\begin{aligned} \psi &\sim \exp(-ikx) + b(k) \exp(ikx) && \text{при } x \rightarrow +\infty, \\ \psi &\sim a(k) \exp(-ikx) && \text{при } x \rightarrow -\infty, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где комплексные числа $b(k)$ и $a(k)$, зависящие от волнового числа, есть коэффициенты отражения и прохождения соответственно. Здесь взята падающая волна единичной амплитуды. В случае дискретного спектра κ_m собственные функции

$\psi_m \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$ и квадраты их интегрируемы, значит, мы можем нормировать ее по следующему правилу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m^2 dx = 1. \quad (3.14)$$

Из закона сохранения энергии имеем: энергия падающей волны равна сумме энергии отраженной волны и энергии прошедшей волны, т. е.

$$1 = |a|^2 + |b|^2, \quad (3.15)$$

а κ_m , c_m , $b(k)$ и $a(k)$ образуют параметры рассеяния для волны.

10. Уравнение Шредингера является уравнением второго порядка, и поэтому необходимо рассматривать два его независимых решения. Предположим, что ψ — одно из решений, а φ — другое линейно независимое решение уравнения, тогда $\varphi_{xx} + (\lambda - u)\varphi = 0$. Делая подстановку $\varphi = \psi X$ и используя соотношение $\psi_{xx} + (\lambda - u)\psi = 0$, имеем $X_{xx}/X + 2\psi_x/\psi = 0$, проинтегрировав которое получим $X_x = A/\psi^2$. Отсюда $X = A \int dx/\psi^2 + B$, и другое решение имеет вид

$$\varphi = A\psi \int dx/\psi^2 + B\psi.$$

Мы можем опустить второй член справа, так как он будет включен в член, содержащий ψ . Поэтому мы можем принять

$$\varphi = \psi \int_0^x dx/\psi^2.$$

11. Пусть потенциал $u(x)$ — четная функция. Тогда уравнение Шредингера инвариантно относительно преобразования $x \rightarrow -x$. Следовательно, если $\psi(x)$ — собственная функция, то $\psi(-x)$ — тоже собственная функция и они равны с точностью до постоянного множителя: $\psi(-x) = c\psi(x)$. Еще раз применяя преобразование $x \rightarrow -x$, получаем $\psi(x) = c\psi(-x) = c^2\psi(x)$, так что $c = \pm 1$ и $\psi(-x) = \pm\psi(x)$. Поэтому если потенциал симметричен относительно $x=0$, то волновая функция стационарных состояний либо четная, либо нечетная. Этот результат следует из предположения, что дискретный спектр оператора Шредингера невырожден. Если мы не будем делать этого предположения, то при преобразовании $x \rightarrow -x$ две собственные функции с одним и тем же собственным значением могут просто переходить друг в друга.

3.3 Интервалы уравнения и связь между уравнениями КдФ и Шредингера

Запишем уравнение КдФ

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (3.16)$$

в форме закона сохранения

$$T_t + X_x = 0, \quad (3.17)$$

где $T = u$, $X = -3u^2 + u_{xx}$. Если мы предположим, что функция u периодична по x либо что u и ее производные исчезают достаточно быстро при $x \rightarrow \pm \infty$, то, интегрируя закон сохранения (3.17), получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int T dx = 0 \quad \text{или} \quad \int T dx \equiv I, \quad \text{где } I \text{ не зависит от времени.} \quad (3.18)$$

Таким образом, $I = \int u dx$ с пределами интегрирования $\pm \infty$ или двумя концами периода по x есть не зависящий от времени функционал на решениях уравнения КдФ. Мы назовем не зависящий от времени функционал интегралом уравнения. Миура, Гарднер и Крускал [1968] показали, что уравнение КдФ имеет бесконечное число полиномиальных законов сохранения. Первый из них выписан выше. Следующий может быть выведен при помощи умножения (3.16) на u , так что

$$T = 1/2 u^2, \quad X = 1/3 u^3 + uu_{xx} - 1/2 u_x^2. \quad (3.19)$$

Третий был выведен Уиземом в 1967 году:

$$T = 1/3 u^3 - u_x^2, \quad X = 1/4 u^4 + u^2 u_{xx} - 2uu_x^2 - 2u_x u_{xxx} + u_{xx}^2. \quad (3.20)$$

Так как каждый закон сохранения дает интеграл уравнения КдФ, ясно, что уравнение КдФ имеет бесконечное число интегралов вида (3.18). Однако это не единственные интегралы, как мы вскоре увидим. Объясним теперь, каким образом впервые возникло уравнение Шредингера при изучении уравнения КдФ. Подставим

$$u = v^2 + u_x \quad (3.21)$$

в уравнение КдФ (3.16). Тогда получим уравнение

$$2v(v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx}) + (v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx})_x = 0,$$

которое удовлетворяется, когда v удовлетворяет модифицированному уравнению КдФ

$$v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0. \quad (3.22)$$

Таким образом, если v эволюционирует согласно (3.22), то u , определяемое уравнением (3.16), удовлетворяет уравне-

нию КдФ. Модифицированное уравнение КдФ имеет также бесконечное число полиномиальных законов сохранения вида (3.17), причем первые три из них имеют вид

$$T = v, \quad X = \frac{1}{3}v^3 + v_{xx}, \quad (3.23)$$

$$T = \frac{1}{2}v^2, \quad X = \frac{1}{4}v^4 + vv_{xx} - \frac{1}{2}v_x^2, \quad (3.24)$$

$$T = \frac{1}{4}v^4 - \frac{3}{2}v_x^2, \quad X = \frac{1}{6}v^6 + v^3v_{xx} - 3v^2v_x^2 - 3v_xv_{xxx} + \frac{3}{2}v_{xx}^2. \quad (3.25)$$

Законы сохранения определяют интегралы модифицированного уравнения КдФ. Уравнение (3.21) устанавливает связь между упоминавшимися выше интегралами уравнения КдФ (3.16) и модифицированного уравнения КдФ (3.22). Эта связь справедлива для всех интегралов, за исключением интеграла модифицированного уравнения КдФ $\int v dx$, который не может быть получен из интеграла уравнения КдФ при помощи преобразования (3.21). Для данной функции u соотношение (3.21) есть не что иное, как уравнение Риккати, которое может быть превращено в линейное уравнение при помощи хорошо известной подстановки

$$v = \psi_x / \psi. \quad (3.26)$$

Уравнение для ψ есть одномерное уравнение Шредингера

$$\psi_{xx} - u\psi = 0 \quad (3.27)$$

без членов, отвечающих ненулевым уровням энергии. Замечая, что уравнение КдФ инвариантно относительно преобразований

$$t \rightarrow t', \quad x \rightarrow x' - 6ct', \quad u \rightarrow u' + c, \quad (3.28)$$

в (3.27) могут быть введены и ненулевые уровни энергии. Это также ведет к доказательству того, что собственные значения уравнения Шредингера

$$\psi_{xx} + (\lambda - u)\psi = 0, \quad (3.29)$$

где u эволюционирует согласно уравнению КдФ, суть не зависящие от времени функционалы от u , т. е. они являются интегралами уравнения КдФ (3.16). В следующем разделе мы докажем это.

3.4. Независимость от времени спектра уравнения Шредингера, определение параметров рассеяния

Докажем, что собственные значения уравнения Шредингера (3.29) не зависят от t , которое входит параметрически в потенциал $u(x, t)$, удовлетворяющий зависимому от вре-

мени уравнению КдФ. Из (3.29) имеем

$$u = \psi_{xx}/\psi + \lambda. \quad (3.30)$$

Подставляя (3.30) в (3.17), получаем¹⁾

$$\lambda_t \psi^2 + (\psi R_x - \psi_x R)_x = 0, \quad (3.31)$$

$$\text{где} \quad R = \psi_t + \psi_{xxx} - 6\lambda\psi_x - 3\psi_x\psi_{xx}/\psi = \quad (3.32a)$$

$$= \psi_t + \psi_{xxx} - 3(u + \lambda)\psi_x. \quad (3.32b)$$

Интегрируя (3.31) по x от $x = -\infty$ до $+\infty$ и рассматривая нормированные волновые функции, получаем

$$\lambda_t = 0 \quad (3.33)$$

в силу граничных условий на ψ , а именно в силу того, что ψ и ее производные стремятся к нулю при $|x| \rightarrow \infty$. Утверждение доказано.

Наиболее важное следствие этого результата заключается в том, что мы можем сразу же для всех моментов времени определить спектр уравнения Шредингера, используя начальное условие $u(x, 0) = u_0(x)$, заданное заранее для решения уравнения КдФ.

Для непрерывного спектра собственное значение λ может быть принято не зависящим от t , следовательно, (3.33) должно выполняться. Подставляя (3.33) в (3.31), как для дискретного, так и для непрерывного спектров получаем

$$\psi R_{xx} - R\psi_{xx} = 0, \quad (3.34)$$

что в силу (3.29) сводится к

$$R_{xx} + (\lambda - u)R = 0. \quad (3.35)$$

Таким образом, R также удовлетворяет уравнению Шредингера, и мы можем взять

$$R = C(t)\psi + D(t)\psi \int_0^x dx/\psi^2. \quad (3.36)$$

Рассмотрим теперь собственное значение λ . Так как $\psi \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, то для ограниченности R мы должны принять

$$D = 0, \quad (3.37)$$

и значит

$$R = C(t)\psi, \quad (3.38)$$

или из (3.32a) имеем

$$C(t)\psi^2 = \psi\psi_t + \psi\psi_{xxx} - 6\lambda\psi\psi_x - 3\psi_x\psi_{xx}. \quad (3.39)$$

¹⁾ Получение выражения (3.31) требует от читателя некоторой искусственности в элементарных преобразованиях. — *Прим. перев.*

Интегрируя это соотношение по x от $-\infty$ до $+\infty$ и используя граничные условия на ψ и ее производные, а также условие нормировки $(\partial/\partial t) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^2 dx = 0$, получаем

$$C(t) = 0, \quad (3.40)$$

$$\text{так что} \quad \psi_t + \psi_{xxx} - 6\lambda\psi_x - 3\psi_x\psi_{xx}/\psi = 0. \quad (3.41)$$

При $x \rightarrow +\infty$ мы можем написать

$$\psi \sim c_m(t) \exp(-\kappa_m x), \quad \lambda_m = -\kappa_m^2, \quad \kappa_m > 0. \quad (3.42)$$

Подставляя (3.42) в (3.41), имеем $(d/dt)c_m = 4\kappa_m^3 c_m$, интегрирование которого дает

$$c_m(\kappa_m, t) = c_m(\kappa_m, 0) \exp(4\kappa_m^3 t). \quad (3.43)$$

Рассмотрим точки из непрерывного спектра k . Для стационарной плоской волны, идущей из $x = \infty$, можно написать

$$\psi \sim a(k, t) \exp(-ikx), \quad x \rightarrow -\infty, \quad (3.44)$$

где a — коэффициент прохождения. Подставляя (3.44) в (3.36), где R дается формулой (3.32), имеем

$$a_t + 4ik^3 a - Ca = (D/a) \int_0^x \exp(2ikx) dx, \quad (3.45)$$

где левая часть — функция только от t , а правая часть содержит функцию от x в качестве множителя. Значит, (3.45) выполняется лишь при

$$D = 0, \quad (3.46)$$

$$a_t - (C - 4ik^3) a = 0. \quad (3.47)$$

Последнее равенство содержит неизвестную функцию $C(t)$. Асимптотическое поведение этой плоской волны при $x \rightarrow \infty$ дается формулой

$$\psi \sim \exp(-ikx) + b(k, t) \exp(ikx), \quad (3.48)$$

где падающая волна имеет единичную амплитуду и b — коэффициент отражения. Подставляя (3.48) в (3.36), получаем

$$\exp(ikx) [b_t - 4ik^3 b - Cb] + \exp(-ikx) [4ik^3 - C] = 0,$$

откуда следует, что

$$C = 4ik^3, \quad (3.49)$$

$$b_t - 4ik^3 b - Cb = 0. \quad (3.50)$$

Подставляя значение C из (3.49) в (3.47) и (3.50) и интегрируя, получаем

$$a(k, t) = a(k, 0), \quad (3.51)$$

$$b(k, t) = b(k, 0) \exp(8ik^3 t). \quad (3.52)$$

Уравнения (3.43), (3.51) и (3.52) определяют поведение параметров рассеяния c_m , a , b в зависимости от t через их значения при $t=0$, которые можно получить путем решения уравнения Шредингера с потенциалом $u_0(x)$, заданным начальным условием для уравнения КдФ. Таким образом, решение прямой задачи рассеяния завершено.

3.5. Обратная задача рассеяния

Чтобы определить потенциал $u(x, t)$ из данных рассеяния, следует решить обратную задачу рассеяния. В настоящей задаче этот потенциал является решением уравнения КдФ. Мы будем следовать методу, предложенному И. М. Гельфандом и Б. М. Левитаном [1951]¹⁾ и Кэем и Мозесом [1956], а далее развитому Гарднером, Гринном, Крускалом и Миурой [1974]. Эти авторы показали, что требуемое решение уравнения КдФ задается в виде

$$u(x, t) = -2(d/dx)K(x, x), \quad (3.53)$$

где $K(x, y)$ удовлетворяет интегральному уравнению Гельфанда — Левитана

$$K(x, y) + B(x+y) + \int_x^{+\infty} B(y+z)K(x, z) dz = 0, \quad (3.54)$$

и ядро B дается выражением²⁾

$$B(\xi) = \sum_{m=1}^N c_m^2(\kappa_m, t) \exp(-\kappa_m \xi) + (1/2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} b(k, t) \exp(ik\xi) dk \quad (3.55)$$

в предположении, что существует N невырожденных собственных значений уравнения Шредингера. В уравнении (3.55) первый член в правой части дает вклад дискретной части спектра, а второй — вклад непрерывной части спектра. С помощью уравнений (3.43), (3.51) и (3.52) можно записать в

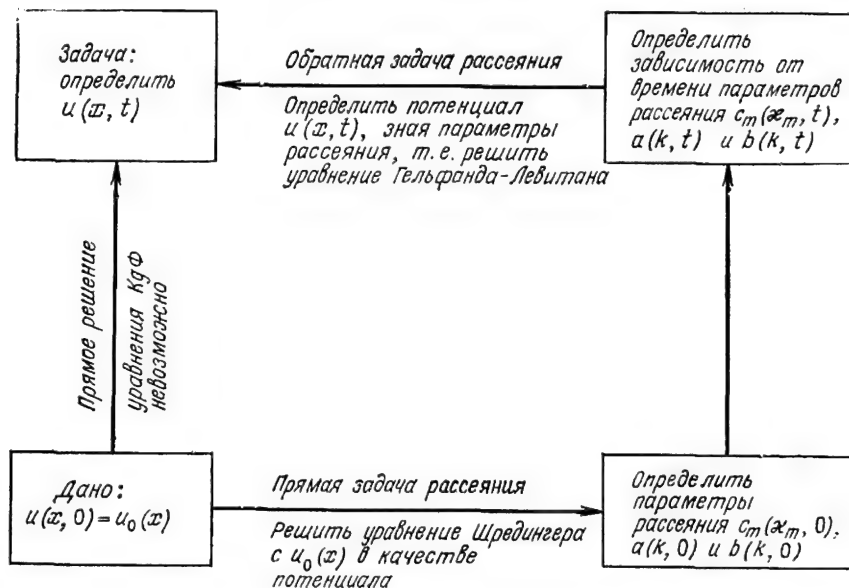
¹⁾ А также В. А. Марченко [1955]. — Прим. перев.

²⁾ Напомним, что $c_m(\kappa_m, t)$ есть коэффициент при $\exp(-\kappa_m t)$ в асимптотике нормированной собственной функции ψ_m при $x \rightarrow +\infty$. — Прим. перев.

явном виде зависимость от времени уравнения (3.55):

$$B(\xi) = \sum_{m=1}^N c_m^2(x_m, 0) \exp(8x_m^3 t - x_m \xi) + \\ + (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} b(k, 0) \exp[i(8k^3 t + k\xi)] dk. \quad (3.56)$$

Следовательно, перед тем как решать интегральное уравнение Гельфанда — Левитана для определения $K(x, y)$, надо определить $c_m(x_m, 0)$, $a(k, 0)$ и $b(k, 0)$ из решения прямой задачи рассеяния для уравнения Шредингера, взяв начальное значение $u_0(x)$ в качестве потенциала. Таким образом, мы пришли к следующей схеме решения уравнения КдФ:



Главное преимущество этого метода заключается в том, что решение нелинейного уравнения КдФ сводится к решению линейного дифференциального уравнения второго порядка (уравнения Шредингера) и линейного интегрального уравнения (т. е. уравнения Гельфанда — Левитана). Более того, переменные t и x в уравнении (3.54) являются только параметрами, так что оно является интегральным уравнением только относительно единственной переменной y . Если потенциал $u_0(x)$ безотражательный, то уравнение существенно упрощается, так как второй член в (3.56) пропадает. В следую-

щем разделе будет показано, что используемые в нем начальные условия $u_0(x)$ являются безотражательными потенциалами.

3.6. Солитонные решения уравнения КдФ

Чтобы проиллюстрировать метод обратной задачи теории рассеяния, в этом разделе мы рассмотрим простые случаи одно- и двухсолитонных решений уравнения КдФ. Это рассмотрение покажет, что одному собственному значению уравнения Шредингера соответствует только одно солитонное решение и наоборот. Мы установим аналогичный факт для общего случая N солитонов в следующем разделе.

3.6.1. Односолитонное решение

Мы рассматриваем этот случай лишь для того, чтобы проверить наш метод. Решение (3.6) уравнения (3.3) соответствует начальному условию $u_0(x) = -1/2 a^2 \operatorname{sech}^2(1/2 ax)$. Для определенности возьмем $a = 2$, так что стационарное решение уравнения КдФ (3.3), отвечающее начальному условию

$$u_0(x) = -2 \operatorname{sech}^2 x, \quad (3.57)$$

имеет вид

$$u(x, t) = -2 \operatorname{sech}^2(x - 4t). \quad (3.58)$$

Теперь постараемся получить решение (3.58) при помощи обратной задачи теории рассеяния при начальном условии (3.57). Таким образом, в прямой задаче рассеяния мы должны решить задачу на собственные значения для уравнения Шредингера:

$$\psi_{xx} + (2\operatorname{sech}^2 x + \lambda) \psi = 0. \quad (3.59)$$

Потенциал (3.57), который появляется в (3.59), является безотражательным, т. е. $b(k, 0) = 0$ для непрерывного спектра. Кэй и Мозес [1956] детально рассмотрели весь класс безотражательных потенциалов, частным случаем которых является (3.57) (и (3.84) в следующем разделе). Итак, сделав эти предположения, определим теперь дискретный спектр. Следуя Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшицу [1974], представим решение уравнения (3.59) через гипергеометрические функции. Сначала подставим

$$\psi = \omega \operatorname{sech}^s x \quad (3.60)$$

в (3.59), тогда получим

$$\omega_{xx} - 2s(\operatorname{th} x) \omega_x + \omega[(2 - s - s^2) \operatorname{sech}^2 x + \lambda + s^2] = 0. \quad (3.61)$$

Если мы хотим, чтобы коэффициент при ω не зависел от x , то должны выбрать $s^2 + s - 2 = 0$, т. е. $s = 1, -2$.

$$\text{Выберем } s = 1. \quad (3.62)$$

При этом выборе уравнение (3.61) принимает вид

$$\omega_{xx} - 2(\operatorname{th} x) \omega_x + (\lambda + 1) \omega = 0, \quad (3.63)$$

$$\text{где } \psi = \omega \operatorname{sech} x. \quad (3.64)$$

Чтобы привести (3.63) к стандартной форме гипергеометрического уравнения

$$x(1-x)y_{xx} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y_x - \alpha\beta y = 0, \quad (3.65)$$

сделаем подстановку

$$\xi = \operatorname{sh}^2 x. \quad (3.66)$$

Тогда получим следующее уравнение, определяющее ω :

$$\xi(1+\xi)\omega_{\xi\xi} + \frac{1}{2}\omega_{\xi} + \frac{1}{4}(1-\kappa^2)\omega = 0, \quad (3.67)$$

где

$$\omega = (1+\xi)^{1/2} \psi, \quad (3.68)$$

причем здесь формально принято

$$\lambda = -\kappa^2. \quad (3.69)$$

Так как $u_0(x) = -2/\operatorname{ch}^2 x$ — четная функция от x , решение ψ уравнения Шредингера (3.59) может быть либо четным по x , либо нечетным. Более того, ξ , определенная уравнением (3.66), есть четная функция x , а $\sqrt{\xi}$ — нечетная функция x . Заметим, что, согласно (3.66), $\xi \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \pm \infty$. Следовательно, так как $\psi \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$ (т. е. при $\xi \rightarrow \infty$), то $\omega/(1+\xi)^{1/2} \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$. Четные и нечетные (по x) интегралы уравнения (3.67) имеют вид

$$\omega_1 = F(-\frac{1}{2} + \kappa/2, -\frac{1}{2} - \kappa/2, \frac{1}{2}, -\xi), \quad (3.70)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\xi} F(\kappa/2, -\kappa/2, \frac{3}{2}, -\xi). \quad (3.71)$$

Так как ω должно быть ограничено в особой точке $\xi = -1$ уравнения (3.67), выражения (3.70) и (3.71) должны быть полиномами. Далее имеем

$$\psi_1 = \frac{F(-\frac{1}{2} + \kappa/2, -\frac{1}{2} - \kappa/2, \frac{1}{2}, -\xi)}{\sqrt{1+\xi}}, \quad (3.72)$$

$$\psi_2 = \sqrt{\frac{\xi}{1+\xi}} F(\kappa/2, -\kappa/2, \frac{3}{2}, -\xi). \quad (3.73)$$

Значения κ , при которых ω_1 и ω_2 являются полиномами, а ψ_1 и ψ_2 стремятся к нулю при $\xi \rightarrow \infty$, соответствуют дискретному спектру. Так как $(\xi/(1+\xi))^{1/2} \rightarrow 1$ при $\xi \rightarrow \infty$, уравнение

(3.73) теряет смысл, если мы положим $\kappa = 0$. Уравнение (3.72) дает приемлемое решение только тогда, когда

$$-1/2 + \kappa/2 = 0, \text{ или } \kappa = 1, \text{ или } \lambda = -1. \quad (3.74)$$

Следовательно, уравнение Шредингера имеет единственное собственное значение $\kappa = 1$. Собственная функция, соответствующая безотражательному потенциалу (3.57), имеет вид

$$\psi = \alpha / (1 + \xi)^{1/2} = \alpha / \operatorname{ch} x,$$

где α определяется из условия нормировки для ψ :

$$\alpha^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2 x \, dx = 1 \text{ или } \alpha = 1/\sqrt{2},$$

и нормированная собственная функция имеет вид

$$\psi = (1/\sqrt{2}) \operatorname{sech} x. \quad (3.75)$$

Используя уравнение (3.10) при $\kappa = 1$ и уравнения (3.74), (3.75), имеем

$$c(0) = \lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x) \exp x = \sqrt{2}. \quad (3.76)$$

Так как потенциал (3.57) является безотражательным, то $b(k, 0) = 0$, $a(k, 0) = 1$. Следовательно, из уравнений (3.43) и (3.56) получаем

$$c(t) = c(0) \exp(4t) = \sqrt{2} \exp(4t), \quad (3.77)$$

$$B(\xi, t) = 2 \exp(8t - \xi). \quad (3.78)$$

При этом интегральное уравнение Гельфанда — Левитана принимает вид

$$K(x, y) + 2 \exp(8t - x - y) + 2 \exp(8t - y) \int_x^\infty \exp(-z) K(x, z) dz = 0. \quad (3.79)$$

Рассматривая зависимость (3.79) от y , разумно положить

$$K(x, y) = L(x) \exp(-y). \quad (3.80)$$

Это предположение устраняет полностью зависимость (3.79) от y , и результирующее уравнение определяет следующее выражение для $L(x)$:

$$L(x) = -2 \exp x / [1 + \exp(2x - 8t)], \quad (3.81)$$

так что решение уравнения Гельфанда — Левитана имеет вид

$$K(x, y) = -2 \exp(x - y) / [1 + \exp(2x - 8t)], \quad (3.82)$$

а решение уравнения КдФ, удовлетворяющее начальным условиям (3.57), есть

$$u(x, t) = -2 \frac{d}{dx} \left\{ \frac{-2}{1 + \exp(2x - 8t)} \right\} = -2 \operatorname{sech}^2(x - 4t), \quad (3.83)$$

что совпадает с решением типа уединенной волны (3.58). Этот простой пример объясняет, как работает метод обратной задачи рассеяния. Между прочим заметим, что только одна уединенная волна соответствует собственному значению $\kappa = 1$.

3.6.2. Двухсолитонное решение

Рассмотрим следующие начальные данные:

$$u_0(x) = -6 \operatorname{sech}^2 x, \quad (3.84)$$

в которых амплитуда и ширина волны не соответствуют решению типа уединенной волны (3.6) при $t = 0$. При этом мы должны решить следующую задачу на собственные значения для уравнения Шредингера:

$$\psi_{xx} + (\lambda + 6 \operatorname{sech}^2 x) \psi = 0. \quad (3.85)$$

Потенциал $u_0(x)$ опять является безотражательным. Попытаемся найти дискретный спектр. Подставляя (3.60) в (3.59) и выбирая s таким, чтобы коэффициент при ω не зависел от x , имеем

$$s = 2, -3. \quad (3.86)$$

Выбирая $s = 2$, получаем следующее уравнение для ω :

$$\omega_{xx} - 4(\operatorname{th} x) \omega_x + (4 + \lambda) \omega = 0.$$

Теперь при замене независимой переменной на ξ согласно (3.66) это уравнение переходит в уравнение

$$\xi(1 + \xi) \omega_{\xi\xi} + (1/2 - \xi) \omega_{\xi} + 1/4(4 - \kappa^2) \omega = 0, \quad (3.87)$$

где формально вместо λ записано $-\kappa^2$. Здесь (3.84) также четная функция от x , так что мы выпишем четные и нечетные решения уравнения (3.87):

$$\phi_1 = F(-1 + \kappa/2, -1 - \kappa/2, 1/2, -\xi), \quad (3.88)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\xi} F(-1/2 + \kappa/2, -1/2 - \kappa/2, 3/2, -\xi), \quad (3.89)$$

Следовательно, четные и нечетные решения уравнения (3.85) имеют вид

$$\psi_1 = (1/\operatorname{ch}^2 x) F(-1 + \kappa/2, -1 - \kappa/2, 1/2, -\operatorname{sh}^2 x), \quad (3.90)$$

$$\psi_2 = (\operatorname{sh} x/\operatorname{ch}^2 x) F(-1/2 + \kappa/2, -1/2 - \kappa/2, 3/2, -\operatorname{sh}^2 x). \quad (3.91)$$

Здесь ψ_1 и $\psi_2 \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Эти граничные условия могут быть удовлетворены лишь в том случае, когда гипергеометрические функции (3.90), (3.91) сводятся к полиномам. Уравнение (3.90) допускает приемлемое решение только тогда, когда

$$\kappa = 2(1 - n) > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Это дает только одно значение $\kappa = 2$, соответствующее $n = 0$, для которого

$$\psi_1 = 1/\text{ch}^2 x, \quad \kappa = 2. \quad (3.92)$$

Функция в (3.91) становится полиномом, когда $\kappa = 1 - 2n > 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Здесь также получим лишь одно значение κ , а именно $\kappa = 1$, соответствующее $n = 0$, которое дает допустимое решение

$$\psi_2 = \text{sh } x/\text{ch}^2 x, \quad \kappa = 1. \quad (3.93)$$

Нормированные функции, соответствующие собственным значениям $\kappa = 2$ и $\kappa = 1$, имеют соответственно вид

$$\psi_1 = (\sqrt{3}/2) \text{sech}^2 x, \quad \kappa_1 = 2, \quad (3.92')$$

$$\psi_2 = \sqrt{3/2} \text{sech}^2 x \cdot \text{sh } x, \quad \kappa_2 = 1. \quad (3.93')$$

Мы можем сразу определить значения $c_1(0)$ и $c_2(0)$, как и в (3.76):

$$c_1(0) = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(2x) (\sqrt{3}/2 \text{ch}^2 x) = 2\sqrt{3}, \quad (3.94)$$

$$c_2(0) = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) \sqrt{3/2} \text{sh } x/\text{ch}^2 x = \sqrt{6}. \quad (3.95)$$

Следовательно, из уравнения (3.43) имеем

$$c_1(t) = 2\sqrt{3} \exp(32t), \quad (3.96)$$

$$c_2(t) = \sqrt{6} \exp(4t). \quad (3.97)$$

Ядро $B(\xi)$ дается формулой

$$B(\xi) = 12 \exp(64t - 2\xi) + 6 \exp(8t - \xi), \quad (3.98)$$

так что уравнение Гельфанда — Левитана принимает вид

$$K(x, y) + 12 \exp(64t - 2x - 2y) + 6 \exp(8t - x - y) + \\ + \int_{\mathbb{R}} \{ [12 \exp(64t - 2y - 2z) + 6 \exp(8t - y - z)] K(x, z) \} dz = 0. \quad (3.99)$$

Чтобы сделать это уравнение не зависящим от y , предположим

$$K(x, y) = C_1 L_1(x) \exp(-2y) + C_2 L_2(x) \exp(-y), \quad (3.100)$$

$$\text{где } C_1 = 12 \exp(64t), \quad C_2 = 6 \exp(8t). \quad (3.101)$$

Подставляя (3.100) в (3.99), приравнявая коэффициенты при $\exp(-2y)$ и $\exp(-y)$ нулю и выполняя необходимые интегрирования, получаем два уравнения для определения $L_1(x)$ и $L_2(x)$:

$$\begin{aligned} \{1 + (C_1/4) \exp(-4x)\} L_1 + (C_2/3) \exp(-3x) L_2 + \exp(-2x) &= 0, \\ (C_1/3) \exp(-3x) L_1 + \{1 + (C_2/2) \exp(-2x)\} L_2 + \exp(-x) &= 0. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения, получаем

$$L_1 = -(1/D) \{ \exp(-2x) + 1/6 C_2 \exp(-4x) \},$$

$$L_2 = (1/D) \{ -\exp(-x) + 1/12 C_1 \exp(-5x) \},$$

где

$$D = 1 + (C_1/4) \exp(-4x) + (C_2/2) \exp(-2x) + (C_1 C_2 / 72) \exp(-6x).$$

Подставляя эти значения L_1 и L_2 в уравнение (3.100) и приравнявая y и x , имеем

$$K(x, x) = -6 \frac{\exp(8t - 2x) + 2 \exp(64t - 4x) + \exp(72t - 6x)}{1 + 3 \exp(8t - 2x) + 3 \exp(64t - 4x) + \exp(72t - 6x)},$$

откуда получается следующее решение уравнения КдФ, удовлетворяющее начальному условию (3.84):

$$u(x, t) = -12 \frac{3 + 4 \operatorname{ch}(8t - 2x) + \operatorname{ch}(64t - 4x)}{[\operatorname{ch}(36t - 3x) + 3 \operatorname{ch}(28t - x)]^2}. \quad (3.102)$$

Чтобы понять природу этого решения, рассмотрим его асимптотическое поведение при $x \rightarrow \pm \infty$. При изучении асимптотического поведения мы преследуем цель определить, содержит ли оно скрытые в нем решения для солитонов, соответствующих собственным значениям $\kappa_1 = 2$ и $\kappa_1 = 1$. Сначала рассмотрим собственное значение $\kappa_1 = 2$. Для этого положим в (3.102)

$$\xi = x - 4\kappa_1^2 t = x - 16t \quad (3.103)$$

и перейдем к пределу при $t \rightarrow \pm \infty$, сохраняя ξ фиксированным. Можно легко показать, что

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{t \rightarrow -\infty \\ \xi \text{ фикс.}}} u(x, t) &= -96 \frac{\exp(4\xi)}{\{1 + 3 \exp(4\xi)\}^2} = \\ &= -8 \operatorname{sech}^2 2(\xi - \xi_1) = -8 \operatorname{sech}^2 \{2(x - 16t - \xi_1)\}, \end{aligned} \quad (3.104)$$

$$\text{где } \exp(-4\xi_1) = 3 \text{ и} \quad (3.105)$$

$$\lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ \xi \text{ фикс.}}} u(x, t) = -96 \frac{\exp(-4\xi)}{(1 + 3 \exp(-4\xi))^2} =$$

$$= -8 \operatorname{sech}^2 2(\xi - \xi'_1) = -8 \operatorname{sech}^2 \{2(x - 16t - \xi'_1)\}, \quad (3.106)$$

$$\text{где } \exp(4\xi'_1) = 3. \quad (3.107)$$

Аналогично, если мы положим

$$\xi = x - 4x_2^2 t = x - 4t \quad (3.108)$$

и перейдем к пределу в (3.102) при $t \rightarrow \pm \infty$, сохраняя ξ постоянным, получим

$$\lim_{\substack{t \rightarrow -\infty \\ \xi \text{ фикс.}}} u(x, t) = -24 \frac{\exp(-2\xi)}{(1 + 3 \exp(-2\xi))^2} =$$

$$= -2 \operatorname{sech}^2(\xi - \xi_2) = -2 \operatorname{sech}^2(x - 4t - \xi_2), \quad (3.109)$$

$$\text{где } \exp(2\xi_2) = 3 \text{ и} \quad (3.110)$$

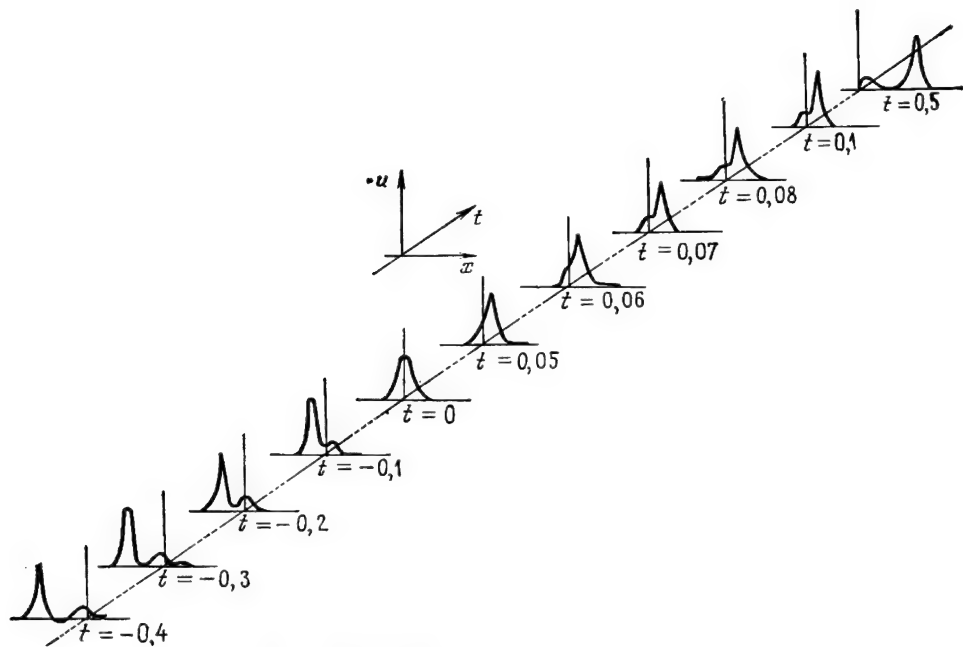
$$\lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ \xi \text{ фикс.}}} u(x, t) = -24 \frac{\exp(2\xi)}{(1 + 3 \exp(2\xi))^2} =$$

$$= -2 \operatorname{sech}^2(\xi - \xi'_2) = -2 \operatorname{sech}^2(x - 4t - \xi'_2), \quad (3.111)$$

$$\text{где } \exp(-2\xi'_2) = 3. \quad (3.112)$$

Теперь понятно, что уравнения (3.104) и (3.106) с точностью до разницы в фазе представляют собой тот же самый солитон, перемещающийся от $x = -\infty$ до $x = +\infty$. Аналогично уравнения (3.109) и (3.111) также с точностью до разницы в фазе представляют собой тот же самый солитон, перемещающийся от $x = -\infty$ до $x = +\infty$. Таким образом, можно заключить, что каждому собственному значению уравнения Шредингера (3.85) соответствует односолитонное решение. Между тем уравнение (3.102) описывает *двухсолитонную* волну, которая распадается на два солитона при $t \rightarrow \infty$ и $t \rightarrow -\infty$, и эффект нелинейного взаимодействия между ними, описываемого уравнением КдФ, сводится просто к тому, что их взаимное положение смещается по отношению к положению, которое они заняли бы, если бы взаимодействия не было.

На рис. 3.1 изображено взаимодействие двух отдельных солитонов, движущихся с разными скоростями, равными 16 и 4, и амплитудами, равными 8 и 2, начинающими движение с момента $t = -\infty$; при этом больший солитон следует за меньшим. Сначала больший солитон начинает «проглатывать» меньший, затем при $t = 0$ они сливаются, образуя единую двоянную волну. При дальнейшем росте t появляется



Р и с. 3.1. Взаимодействие двух солитонов.

больший солитон, оставляя позади меньший; при $t = 0,5$ они снова разделяются. Как упоминалось ранее, такое поведение солитонов удивительно, так как, если не принимать во внимание разность фаз, оно подобно линейному взаимодействию (т. е. случаю, описываемому линейным волновым уравнением. — Прим. перев.).

3.6.3. N -солитонное решение

При изучении N -солитонных решений уравнения КдФ мы будем в основном следовать методу, описанному в п. 3.6.2, делая необходимые изменения.

Предположим, что потенциал $u_0(x)$ является безотражательным и уравнение Шредингера имеет N собственных значений κ_m , $m = 1, 2, \dots, N$. Ядро $B(\xi)$ из уравнения (3.55) имеет вид

$$B(\xi) = \sum_{m=1}^N c_m^2 \exp(-\kappa_m \xi), \quad (3.113)$$

$$\text{где } c_m^2 = c_m^2(0) \exp(8\kappa_m^3 t), \quad (3.114)$$

и уравнение Гельфанда — Левитана принимает вид

$$K(x, y) + \sum_{m=1}^N c_m^2 \exp[-\kappa_m(x+y)] + \\ + \sum_{m=1}^N c_m^2 \exp(-\kappa_m y) \int_x^{\infty} \exp(-\kappa_m z) K(x, z) dz = 0. \quad (3.115)$$

Чтобы устранить из (3.115) зависимость от y , мы должны выбрать $K(x, y)$ в следующем виде:

$$K(x, y) = - \sum_{m=1}^N c_m \psi_m(x) \exp(-\kappa_m y), \quad (3.116)$$

где $\psi(x)$ — неизвестные функции, а множители c_m введены так, чтобы функции ψ_m оказались нормированными собственными функциями уравнения Шредингера

$$\psi_{xx} - (\kappa_m^2 + u) \psi = 0. \quad (3.117)$$

Подставим (3.116) в (3.115) и приравняем коэффициенты при $\exp(-\kappa_m y)$ для того, чтобы получить следующую систему N линейных уравнений для определения неизвестных функций ψ :

$$\psi_m(x) + \sum_{n=1}^N c_m c_n \psi_n(x) \frac{\exp[-(\kappa_m + \kappa_n)x]}{\kappa_m + \kappa_n} = \\ = c_m \exp(-\kappa_m x), \quad m = 1, 2, \dots, N. \quad (3.118)$$

Можно записать эти уравнения в следующем матричном виде:

$$(I + C)\psi = E, \quad (3.119)$$

где I — единичная матрица порядка N ,

$$C \equiv [c_{mn}] = \left[c_m c_n \frac{\exp [-(\kappa_m + \kappa_n) x]}{\kappa_m + \kappa_n} \right] \quad (3.120)$$

есть $(N \times N)$ -матрица и

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} c_1 \exp(-\kappa_1 x) \\ c_2 \exp(-\kappa_2 x) \\ \vdots \\ c_N \exp(-\kappa_N x) \end{bmatrix} \quad (3.121)$$

— матрицы-столбцы. Достаточное условие единственности решения уравнения (3.119) заключается в положительной определенности C , что действительно имеет место, как видно из нижеследующего. Квадратичная форма, отвечающая квадратной матрице C , имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N c_m c_n \frac{\exp [-(\kappa_m + \kappa_n) x]}{\kappa_m + \kappa_n} X_m X_n &= \\ &= \int_x^\infty dz \left[\sum_{m=1}^N c_m \exp(-\kappa_m z) X_m \right]^2, \end{aligned}$$

откуда следует, что она положительно определена. Таким образом, доказан факт единственности решения.

Далее легко показать, что

$$0 < \det C = \left(\prod_{m=1}^N c_m^2 \right) \exp \left[-2 \left(\sum_{m=1}^N \kappa_m \right) x \right] \det \left(\frac{1}{\kappa_m + \kappa_n} \right), \quad (3.122)$$

$$\text{так что } \det \left(\frac{1}{\kappa_m + \kappa_n} \right) > 0. \quad (3.123)$$

Из (3.122) следует

$$\det C = \alpha \exp(-\beta x), \quad (3.124)$$

где α и β положительны. Пусть Q_{mn} — алгебраические дополнения к элементам n -го столбца матрицы $I + C$ в (3.119); тогда, раскладывая по n -му столбцу, имеем

$$\Delta \equiv \det(I + C) = \sum_{m=1}^N \left(\delta_{mn} + c_m c_n \frac{\exp [-(\kappa_m + \kappa_n) x]}{\kappa_m + \kappa_n} \right) Q_{mn}, \quad (3.125)$$

где δ_{mn} — символ Кронекера. Тогда правило Крамера дает

$$\psi_m = (1/\Delta) \sum_{n=1}^N c_n \exp(-\kappa_n x) Q_{mn}. \quad (3.126)$$

Следовательно, приравнивая y и x , получим

$$\begin{aligned} K(x, x) &= - \sum_{m=1}^N c_m \psi_m(x) \exp(-\kappa_m x) = \\ &= - (1/\Delta) \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N c_m c_n \exp[-(\kappa_m + \kappa_n) x] Q_{mn} = \\ &= (1/\Delta) (d\Delta/dx) = d \ln \Delta/dx, \end{aligned} \quad (3.127)$$

и решение уравнения КдФ выражается в виде

$$u(x, t) = -2(d/dx)K(x, x) = -2(d^2/dx^2) \ln \Delta, \quad (3.128)$$

$$= -2(d^2/dx^2) \ln \{\det(I + C)\}. \quad (3.129)$$

Покажем, что $\psi_m(x)$ в (3.116) — нормированные функции, соответствующие собственным значениям уравнения Шредингера

$$L_m[\psi_m] = 0, \quad L_m \equiv d^2/dx^2 - [\kappa_m^2 + u(x)], \quad (3.130)$$

где L_m — линейный дифференциальный оператор. Применяя оператор L_m к (3.118), после значительного упрощения получим

$$L_m[\psi_m] + \sum_{n=1}^N \frac{c_m c_n}{\kappa_m + \kappa_n} \exp\{-(\kappa_m + \kappa_n)x\} L_n[\psi_n] = 0,$$

$$\text{или } (I + C)L(\psi) = 0, \quad (3.131)$$

где $L[\psi] = [L_1[\psi_1], L_2[\psi_2], \dots, L_N[\psi_N]]^T$ — вектор-столбец. Так как матрица $I + C$ невырождена, то (3.131) допускает только тривиальное решение $L[\psi] = 0$. Следовательно, ψ_m — собственные функции уравнения Шредингера, отвечающие собственным значениям κ_m . Если запишем (3.118) в форме

$$\psi_m \exp(\kappa_m x) + \sum_{n=1}^N \frac{c_m c_n}{\kappa_m + \kappa_n} [\psi_n \exp(\kappa_n x)] \exp(-2\kappa_n x) = c_m$$

и перейдем к пределу при $x \rightarrow \infty$, получим $\lim_{x \rightarrow \infty} \psi_m \exp(\kappa_m x) = c_m$. Таким образом, ψ_m — нормированные собственные функции.

3.7. Взаимодействие солитонов

Теперь мы изучим поведение решения (3.129) при $t \rightarrow \pm \infty$, чтобы доказать, что оно содержит N солитонов. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= -2 \frac{d}{dx} K(x, x) = 2 \frac{d}{dx} \sum_{m=1}^N c_m \psi_m(x) \exp(-\kappa_m x) = \\ &= 2 \frac{d}{dx} \sum_{m=1}^N k_m(x) = 2 \sum_{m=1}^N k'_m(x), \end{aligned} \quad (3.132)$$

$$\begin{aligned} \text{где } k_m(x) &= c_m \psi_m(x) \exp(-\kappa_m x), \\ \text{или } \psi_m(x) &= (k_m/c_m) \exp(\kappa_m x). \end{aligned} \quad (3.133)$$

Чтобы получить k_m , запишем (3.118) через k_m :

$$c_m^{-2} \exp(2\kappa_m x) k_m + \sum_{n=1}^N k_n / (\kappa_m + \kappa_n) = 1, \quad m = 1, 2, \dots, N. \quad (3.134)$$

Дифференцируя (3.134) по x , получим

$$\begin{aligned} c_m^{-2} \exp(2\kappa_m x) k'_m + \sum_{n=1}^N k'_n / (\kappa_m + \kappa_n) = \\ = -2\kappa_m c_m^{-2} \exp(2\kappa_m x) k_m, \quad m = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.135)$$

Заметим, что мы можем решить (3.134) и получить k_m и затем найти k'_m , необходимое для решения (3.132). Однако мы найдем k'_m более удобным и изящным способом с помощью (3.135). Перейдем в уравнениях (3.134) и (3.135) к координатной системе, движущейся со скоростью одного из солитонов, определяемой выражением

$$\xi = x - 4\kappa_p^2 t, \quad p = 1, 2, \dots, N. \quad (3.136)$$

Уравнения (3.134) и (3.135) примут вид

$$C_m(\xi) \exp\{-8\kappa_m(\kappa_m^2 - \kappa_p^2)t\} k_m + \sum_{n=1}^N k_n / (\kappa_m + \kappa_n) = 1, \quad (3.137)$$

$$\begin{aligned} C_m(\xi) \exp\{-8\kappa_m(\kappa_m^2 - \kappa_p^2)t\} k'_m + \sum_{n=1}^N k'_n / (\kappa_m + \kappa_n) = \\ = -2\kappa_m k_n C_m(\xi) \exp\{-8\kappa_m(\kappa_m^2 - \kappa_p^2)t\}, \end{aligned} \quad (3.138)$$

$$\text{где } C_m(\xi) = c_m^{-2}(0) \exp(2\kappa_m \xi). \quad (3.139)$$

При $m = p$ эти уравнения имеют вид

$$C_p(\xi) k_p + \sum_{n=1}^N k_n / (\kappa_m + \kappa_n) = 1, \quad (3.140)$$

$$C_p(\xi) k'_p + \sum_{n=1}^N k'_n / (\kappa_m + \kappa_n) = -2\kappa_p k_p C_p(\xi). \quad (3.141)$$

В дальнейшем расположим собственные значения в порядке убывания:

$$\kappa_1 > \kappa_2 > \dots > \kappa_N. \quad (3.142)$$

3.7.1. Асимптотическое поведение при $t \rightarrow \infty$

При $t \rightarrow \infty$ уравнение (3.137) принимает вид

$$\sum_{n=1}^N k_n / (\kappa_m + \kappa_n) = 1, \quad m = 1, 2, \dots, p-1, \quad (3.143)$$

$$C_p(\xi) k_p + \sum_{n=1}^N k_n / (\kappa_m + \kappa_n) = 1, \quad m = p, \quad (3.144)$$

$$k_m = 0, \quad m = p+1, \dots, N. \quad (3.145)$$

В силу (3.145) мы можем объединить (3.143) и (3.144); тогда имеем

$$\sum_{n=1}^p k_n / (\kappa_m + \kappa_n) = 1 - \delta_{mp} C_p(\xi) k_p, \quad m = 1, 2, \dots, p, \quad (3.146)$$

$$k_m = 0, \quad m = p+1, p+2, \dots, N.$$

Аналогично (3.138) и (3.141) дают

$$\sum_{n=1}^p k'_n / (\kappa_m + \kappa_n) = -C_p(\xi) \delta_{mn} (2\kappa_p k_p + k'_p), \quad m = 1, 2, \dots, p, \quad (3.147)$$

$$k'_m = -2\kappa_m k_m = 0, \quad m = p+1, p+2, \dots, N,$$

Для решения уравнений (3.146) и (3.147) определим матрицы

$$K_p \equiv [1/(\kappa_m + \kappa_n)], \quad m, n = 1, 2, \dots, p, \quad (3.148)$$

которые имеют положительные определители для всех $p = 1, 2, \dots, N$. Пусть L_p — матрица, полученная из K_p заменой последнего столбца на столбец, все элементы которого 1. Из (3.146) и (3.147) по правилу Крамера получим

$$k_m \det K_p = \sum_{n=1}^p K_{mn} - C_p(\xi) K_{pm} k_p, \quad m = 1, 2, \dots, p, \quad (3.149)$$

$$k'_m \det K_p = -C_p(\xi) K_{pm} (2\kappa_p k_p + k'_p), \quad m = 1, 2, \dots, p, \quad (3.150)$$

где K_{mn} — алгебраическое дополнение к $1/(\kappa_m + \kappa_n)$ в K_p . Принимая $m = p$, для k_p и k'_p имеем

$$k_p = \det L_p / [\det K_p + C_p(\xi) \det K_{p-1}], \quad (3.151)$$

$$k'_p = -2C_p(\xi) \kappa_p k_p \det K_{p-1} / [\det K_p + C_p(\xi) \det K_{p-1}]. \quad (3.152)$$

Суммируя (3.150) и используя (3.151) и (3.152), получим

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ \xi \text{ фикс.}}} \sum_{m=1}^p k'_m = \frac{-2\kappa_p C_p(\xi)}{[\det K_p / \det L_p + C_p(\xi) \det K_{p-1} / \det L_p]^2}. \quad (3.153)$$

Мы можем легко вычислить определитель K_p , вычитая последний столбец ($n = p$) из каждого предыдущего и вынося общие множители из строк и столбцов:

$$\det K_p = \left[\prod_{m=1}^{p-1} (\kappa_p - \kappa_m) \right] / \left[\prod_{m=1}^p (\kappa_p + \kappa_m) \right] \det L_p. \quad (3.154)$$

Аналогично, вычитая последнюю строку ($n = p$) определителя L_p из каждой другой, вынося общие множители и разлагая по последнему столбцу (состоящему из нулей и единицы на последнем месте), получим

$$\det L_p = \left[\prod_{m=1}^{p-1} (\kappa_p - \kappa_m) \right] / \left[\prod_{m=1}^{p-1} (\kappa_p - \kappa_m) \right] \det K_{p-1}. \quad (3.155)$$

Подставляя (3.139), (3.154) и (3.155) в (3.153), получим

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ \xi \text{ фикс.}}} u(x, t) &= \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ \xi \text{ фикс.}}} 2 \sum_{m=1}^p k'_m = \frac{-8\kappa_p^2 \exp \{2\kappa_p(\xi - \xi_p)\}}{[1 + \exp \{2\kappa_p(\xi - \xi_p)\}]^2} = \\ &= -2\kappa_p^2 \operatorname{sech}^2 [\kappa_p(\xi - \xi_p)] = \\ &= -2\kappa_p^2 \operatorname{sech}^2 [\kappa_p(x - 4\kappa_p^2 t - \xi_p)], \end{aligned} \quad (3.156)$$

где ξ_p дается выражением

$$\exp \{2\kappa_p \xi_p\} = (c_p^2(0)/2\kappa_p) \prod_{m=1}^{p-1} [(\kappa_p - \kappa_m)/(\kappa_p + \kappa_m)]^2. \quad (3.157)$$

Формула (3.156) представляет уединенную волну с амплитудой $2\kappa_p^2$, движущуюся в положительном направлении оси x с постоянной скоростью $4\kappa_p^2$.

3.7.2. Асимптотическое поведение при $t \rightarrow -\infty$

В этом случае мы имеем следующие уравнения, соответствующие (3.146) и (3.147):

$$\sum_{n=p}^N k_n / (\kappa_m + \kappa_n) = 1 - C_p(\xi) \delta_{mp} k_p, \quad m = p, p+1, \dots, N, \\ k_m = 0, \quad m = 1, 2, \dots, p-1; \quad (3.158)$$

$$\sum_{n=p}^N k'_n / (\kappa_m + \kappa_n) = -C_p(\xi) \delta_{mp} (2\kappa_p k_p + k'_p), \\ m = p, p+1, \dots, N, \\ k'_m = -2\kappa_m k_m = 0, \quad m = 1, 2, \dots, p-1. \quad (3.159)$$

Уравнения (3.158) и (3.159) имеют ту же структуру, что и (3.146) и (3.147) при условии замены изменения m от 1 до p на изменение от p до N . Следовательно,

$$\lim_{\substack{t \rightarrow -\infty \\ \xi \text{ фикс.}}} u(x, t) = -2\kappa_p^2 \operatorname{sech}^2 \{ \kappa_p (\xi - \xi'_p) \} = \\ = -2\kappa_p^2 \operatorname{sech}^2 \{ \kappa_p (x - 4\kappa_p^2 t - \xi'_p) \}, \quad (3.160)$$

$$\text{где } \exp(2\kappa_p \xi'_p) = (c_p^2(0)/2\kappa_p) \prod_{m=p+1}^N [(\kappa_p - \kappa_m)/(\kappa_p + \kappa_m)]^2. \quad (3.161)$$

Предыдущие рассмотрения ведут к следующему заключению. Если $u(x, t)$, решение уравнения КдФ, есть безотражательный потенциал Шредингера, то при $t \rightarrow \pm \infty$ каждое собственное значение $\lambda_p = -\kappa_p^2$ связано с солитоном, форма которого стремится к форме уединенной волны (3.156) при $t \rightarrow +\infty$ и форме (3.160) при $t \rightarrow -\infty$. Уединенная волна имеет постоянную скорость $4\kappa_p^2$ и амплитуду $2\kappa_p^2$. Во время ее прохождения от $t = -\infty$ до $t = +\infty$ фаза на ее траектории изменяется на величину

$$\xi_p - \xi'_p = \frac{1}{\kappa_p} \left\{ \sum_{m=1}^{p-1} \ln \left(\frac{\kappa_m - \kappa_p}{\kappa_m + \kappa_p} \right) - \sum_{m=p+1}^N \ln \left(\frac{\kappa_p - \kappa_m}{\kappa_p + \kappa_m} \right) \right\}. \quad (3.162)$$

Эта теорема была независимо доказана В. Е. Захаровым [1971], Вадати и Тодой [1972] и Танакой [1972—1973]. Из (3.162) видно, что полный сдвиг фазы есть сумма сдвигов фаз, претерпеваемых при изолированном парном взаимодействии любых двух солитонов. Этот факт был отмечен также В. Е. Захаровым [1971].

3.8. Непрерывный спектр оператора Шредингера

Мы рассмотрели волны, соответствующие только дискретному спектру уравнения Шредингера. Абловиц и Ньюэлл [1973] рассматривали проблему, соответствующую непрерывному спектру. Взяв уравнение КдФ в виде $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$, они установили, что если начальные данные не приводят к дискретному спектру, то при $x \gg t^{1/3}$ решение $u(x, t)$ затухает экспоненциально. Однако их результаты для $|x| = O(t^{1/3})$ и $x \ll -t^{1/3}$ оказались неверны. Для дальнейшего знакомства с проблемой решения в случае непрерывного спектра рекомендуем обзорную статью Миуры [1976]. Насколько нам известно, случай смешанного спектра еще не исследовался¹⁾.

ЛИТЕРАТУРА

- Абловиц, Ньюэлл (Ablowitz M. J., Newell A. C.)
 [1973] The decay of the continuous spectrum for solutions of the Korteweg — de Vries equation. — J. Math. Phys., v. 14, p. 1277—1284.
- Вадати, Toda (Wadati M., Toda M.)
 [1972] The exact N-soliton solution of the Korteweg — de Vries equation. — J. Phys. Soc. Japan, v. 32, p. 1403—1411.
- Гарднер, Грин, Крускал, Миура (Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M.)
 [1974] Korteweg — de Vries equation and generalizations. VI. Methods for exact solution. — Commun. Pure and Appl. Math., v. 27, p. 97—133.
- Гельфанд И. М., Левитан Б. М.
 [1951] Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции. — Изв. АН СССР, сер. мат., т. 15, с. 309—360.
- Захаров В. Е.
 [1971] Кинетическое уравнение для солитонов. — ЖЭТФ, т. 60, с. 993.
- Кэй, Мозес (Kay I., Moses H. E.)
 [1956] Reflectionless transmission through dielectrics and scattering potentials. — J. Appl. Phys., v. 27, p. 1503—1508.
- Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.
 [1974] Квантовая механика (нерелятивистская теория). — М.: Физматгиз, 1974.
- Миура (Miura R. M.)
 [1976] The Korteweg — de Vries equation: a survey of results. — SIAM Rev., v. 18, p. 412—459.
- Миура, Гарднер, Крускал (Miura R. M., Gardner C. S., Kruskal M. D.)
 [1968] Korteweg — de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion. — J. Math. Phys., v. 9, p. 1204—1209.

¹⁾ Временная асимптотика решения уравнения КдФ (и подобных ему уравнений) может быть получена в терминах начальных данных в явном виде и в случае смешанного спектра. Для начальных данных частного вида смешанная спектральная задача может быть также разрешена явно. — Прим. перев.

Танака (Tanaka S.)

- [1972—1973] On the N -tuple wave solutions of the Korteweg — de Vries equation. — Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ., v. 8, p. 419—427.

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПЕРЕВОДЧИКОМ

Динариев О. Ю., Сибгатуллин Н. Р.

- [1981] О некоторых эффектах диффузии солитонов над неровным дном. — МЖГ, № 5, с. 94—102.

Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.

- [1980] Теория солитонов: метод обратной задачи. — М.: Наука.

Марченко В. А.

- [1955] Восстановление потенциальной энергии по фазам рассеянных волн. — ДАН СССР, т. 104, с. 695—699.

4.1. Введение

Рассмотрение взаимодействия солитонов в гл. 3 основывалось на возможности связать нелинейное уравнение КдФ с линейным одномерным уравнением Шредингера для стационарных состояний; решение $u(x, t)$ уравнения КдФ играло роль потенциала в уравнении Шредингера, а время t рассматривалось как параметр. Эта техника позволила использовать известные свойства собственных значений и функций уравнения Шредингера. Успех метода был обеспечен открытием замечательного свойства этого уравнения, которое состоит в том, что спектр оператора Шредингера с потенциальной энергией, определяемой из уравнения КдФ, не зависит от времени. В результате этот спектр мог быть определен для всех моментов времени лишь при помощи начального условия $u(x, 0)$, взятого в качестве потенциальной функции уравнения Шредингера.

Лакс [1968] в работе, открывшей новое направление в математической теории нелинейных волн, поставил вопрос о возможности изучения таким же образом общего уравнения эволюции

$$u_t = K(u), \quad (4.1)$$

где K — нелинейный оператор, действующий на функцию u и не содержащий явно независимых переменных x и t , и получил положительный ответ.

Сейчас мы рассмотрим метод Лакса, а затем применим его в качестве иллюстрации к рассмотренному ранее уравнению КдФ. Математические средства исследования общего уравнения (4.1) по необходимости должны быть более общими, чем те, которые использовались нами ранее.

Интересно отметить, что исследования Лакса шли параллельно с изучением уравнения КдФ. Это не удивительно, поскольку главная его цель заключалась в объяснении существования солитонов, скрытых в произвольном решении.

Рассмотрим решения уравнения КдФ, принадлежащие классу функций C^∞ , определенных на вещественной оси $-\infty < x < +\infty$ и стремящихся к нулю со своими производными любого порядка при $|x| \rightarrow \infty$. Заметим, что решения уравнения КдФ типа уединенной волны принадлежат указанному классу функций. Заметим также, что мы изучали существование солитонов с помощью исследования асимптотического поведения безотражательных решений. В частности, мы

показали, что существует последовательность положительных скоростей $c_p = 4\kappa_p^2$, $p = 1, 2, \dots, N$, и соответствующий набор фаз ξ_p^\pm , таких, что

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \pm\infty \\ \xi \text{ фикс.}}} u(x, t) = \begin{cases} s(\xi - \xi_p^\pm, c) & \text{при } c = c_p, \\ 0 & \text{при } c \neq c_p, \end{cases} \quad (4.2)$$

где $\xi = x - ct$ — координата, движущаяся со скоростью c , и κ_p — дискретные собственные значения оператора Шредингера с безотражательным потенциалом $u(x, t)$. Наша цель в настоящей главе состоит в том, чтобы показать, что результат (4.2) верен для произвольного решения $u(x, t)$ уравнения КдФ.

Итак, c_p зависит от выбора решения $u(x, t)$ уравнения КдФ. Мы выразим этот факт, назвав c_p функционалом от u и написав символически

$$c_p = c_p(u). \quad (4.3)$$

Обозначим решение (4.1) типа уединенной волны в виде

$$s = s(\xi), \quad \xi = x - ct. \quad (4.4)$$

В гл. 3 мы ввели понятие интеграла уравнения КдФ, согласно которому собственные скорости c_p являются инвариантными функционалами, или интегралами. Математически факт инвариантности можно выразить следующим образом. Если u' и u'' являются значениями u для двух различных моментов времени t' и t'' , то

$$c_p(u') = c_p(u''). \quad (4.5)$$

Аналогично из рассмотрения солитонных решений мы заключаем, что разности фаз $\xi_p^+ - \xi_p^-$ также являются «интегралами» уравнения КдФ. В гл. 3 мы также упомянули, что Миуре, Гарднеру и Крускалу удалось доказать существование бесконечной последовательности интегралов уравнения КдФ. Они предложили метод построения этих интегралов. Интегралы, или не зависящие от времени функционалы, могут существовать также на решениях общего уравнения (4.1). В этой главе мы изучим их свойства.

Первой нашей задачей является введение линейного уравнения, аналогичного уравнению Шредингера, для уравнения (4.1). Затем мы докажем независимость от времени собственных значений этого уравнения. Эти собственные значения будут интегралами уравнения (4.1). Предположения, которые будут сделаны при изучении уравнения (4.1), подсказываются следующими важными свойствами уравнения КдФ:

(а) Уравнение КдФ всегда имеет решение, соответствующее заданным начальным условиям, обладающим достаточной гладкостью и быстро убывающим при $|x| \rightarrow \infty$.

(б) Решения уравнения КдФ, принадлежащие классу $C^\infty(-\infty, \infty)$ и стремящиеся к нулю со своими производными любого порядка при $|x| \rightarrow \infty$, определяются *единственным образом* через свои начальные значения.

Доказательство этой теоремы единственности легко получить следующим образом. Пусть $u_0(x)$ — заданное начальное условие, а u и v — два возможных решения, имеющих $u_0(x)$ в качестве начального условия. Тогда

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0, \quad v_t + vv_x + v_{xxx} = 0.$$

Вычитая второе уравнение из первого и обозначая $u - v$ через w , получим $w_t + uw_x + v_x w + w_{xxx} = 0$. Очевидно, w принадлежит классу $C^\infty(-\infty, \infty)$ и стремится к нулю с производными любого порядка при $|x| \rightarrow \infty$. Умножая последнее уравнение на w и интегрируя по всей оси, получим

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} w^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} (v_x - \frac{1}{2} u_x) w^2 dx = 0.$$

Вводя обозначения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} w^2 dx = E(t) \quad \text{и} \quad \max_{\substack{-\infty < x < +\infty \\ t \geq 0}} |v_x - \frac{1}{2} u_x| = m,$$

имеем $dE/dt \leq mE$, откуда интегрированием получим $E(t) \leq E(0) \exp(mt)$. А так как

$$E(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} [u(x, 0) - v(x, 0)]^2 dx = 0,$$

то $E(t) = 0$ для всех $t \geq 0$. Значит, $w = 0$. Это доказывает единственность решения. Из (а) и (б) следует, что собственные скорости являются функционалами от начальных условий.

В гл. 3 мы рассматривали уравнение КдФ в форме

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0,$$

а соответствующее ему уравнение Шредингера в форме

$$d^2\psi/dx^2 + (\lambda - u)\psi = 0, \quad \lambda = -\kappa^2.$$

При этом решение типа уединенной волны имело вид

$$s(x, t) = -2\kappa^2 \operatorname{sech}^2 \{\kappa(x - 4\kappa^2 t)\}.$$

В настоящем рассмотрении запишем уравнение КдФ в виде

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{4.6}$$

и заменим λ на $-\lambda$, так что соответствующее уравнение Шредингера и решение типа уединенной волны примут форму

$$d^2\psi/dx^2 + [-\lambda + 1/6u]\psi = 0, \\ \text{или } L\psi = \lambda\psi, \quad L \equiv d^2/dx^2 + 1/6u, \quad \lambda = \kappa^2, \quad (4.7)$$

$$s(x, t) = 3c \operatorname{sech}^2\{(\sqrt{c}/2)(x - ct)\}, \quad (4.8)$$

где собственная скорость $c = 4\kappa^2$.

Заметим, что вышеуказанный выбор обусловлен только соображениями удобства анализа и не влияет на общность рассуждений.

4.2. Определения

В настоящем разделе мы введем некоторые определения, необходимые для наших рассуждений. Пусть B — некоторое пространство функций, таких, что для каждого t решение $u(t)$ уравнения эволюции

$$u_t = K(u) \quad (4.9)$$

принадлежит B . Предположим, что мы можем сопоставить каждой функции $u \in B$ самосопряженный оператор $L = L$ действующий на некотором гильбертовом пространстве H , где символ u под L указывает на то, что L зависит от решения: $u: u \rightarrow u$ и обладает следующими свойствами: если временное изменение подчиняется уравнению (4.9), то оператор $L(t)$, который также зависит от времени t , остается *унитарно эквивалентным*.

Для определения термина «унитарная эквивалентность» необходимо ввести ряд определений, которые хорошо известны и будут упомянуты из соображений полноты.

4.2.1. Сопряженный оператор

Пусть φ и $\psi \in H$ и L — оператор на H , тогда L^* назовем оператором, сопряженным к L , если

$$(L\varphi, \psi) = (\varphi, L^*\psi) \quad (4.10)$$

для любых φ и ψ из области определения оператора, где (\cdot, \cdot) обозначает скалярное произведение в H .

4.2.2. Самосопряженный оператор

Оператор L назовем самосопряженным, если он определен для каждого элемента $\in H$ и равен своему сопряженному оператору, т. е. $L^* = L$, так что

$$(L\varphi, \psi) = (\varphi, L\psi) \quad (4.11)$$

для всех φ и $\psi \in H$, если L — самосопряженный оператор.

4.2.3. Симметричные и антисимметричные операторы

Пусть L — оператор, определенный в H . Если $(L\varphi, \psi) = (\varphi, L\psi)$ для всех $\varphi, \psi \in D$, где D — область определения L , то L назовем симметричным оператором. Если же

$$(L\varphi, \psi) = (\varphi, (-L)\psi), \quad (4.12)$$

то назовем L антисимметричным оператором. Таким образом, $L^* = L$ для симметричного оператора L и $L = -L^*$ для антисимметричного L . Из определения ясно, что самосопряженный оператор necessarily симметричный.

4.2.4. Унитарный оператор

Оператор U , определенный для каждого элемента из H , называется унитарным, если

$$UU^* = U^*U = I, \quad (4.13)$$

где I — тождественный оператор. Следовательно, для унитарного оператора U

$$U^* = U^{-1}, \quad U = (U^*)^{-1}, \quad U = U^{**} = (U^{-1})^*, \quad (4.14)$$

где мы использовали общее свойство операторов:

$$T^{**} = T. \quad (4.15)$$

Мы будем также пользоваться следующим свойством операторов. Пусть T и S — два оператора на H , тогда

$$(TS)^* = S^*T^*. \quad (4.16)$$

4.2.5. Унитарная эквивалентность

Оператор $L(t)$ называется «унитарно эквивалентным», если существует однопараметрическое семейство унитарных операторов $U(t)$, таких, что

$$U^{-1}(t)L(t)U(t) \text{ не зависит от } t. \quad (4.17)$$

Математически мы выразим этот факт следующим образом:

$$\begin{aligned} (d/dt)[U^{-1}(t)L(t)U(t)] &= 0, \\ \text{или } [U^{-1}]_t LU + U^{-1}L_t U + U^{-1}LU_t &= 0, \end{aligned} \quad (4.18)$$

где индексом t обозначена производная по времени t .

Пример. Пусть $D = d/dt$ и $(\varphi\psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\psi dt$ — скалярное произведение в L_2 , определенное в гильбертовом пространстве

H , и $\varphi, \psi \in H$. Тогда

$$(D\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{-\infty} (d\varphi/dt) \psi dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi (d\psi/dt) dt = (\varphi, -D\psi).$$

Поэтому D — антисимметричный оператор. Рассмотрим теперь выражение

$$(D^2\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (d^2\varphi/dt^2) \psi dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi (d^2\psi/dt^2) dt = (\varphi, D^2\psi).$$

Поэтому D^2 — симметричный оператор.

В общем случае можно легко показать, что для данного скалярного произведения следующие операторы являются соответственно антисимметричными и симметричными операторами порядка $2q+1$ и $2q$:

$$B_{2q+1} = D^{2q+1} + \sum_{j=1}^q (b_j D^{2j-1} + D^{2j-1} b_j), \quad (4.19a)$$

$$B_{2q} = D^{2q} + \sum_{j=1}^q (b_j D^{2j} + D^{2j} b_j). \quad (4.19b)$$

Заметим, что каждый из этих операторов содержит q неизвестных функций b_j , $j = 1, 2, \dots, q$. Заметим также, что мы могли бы доказать симметричность D^2 непосредственно, без применения интегрирования:

$$\begin{aligned} (D^2\varphi, \psi) &= (D(D\varphi), \psi) = (D\varphi, (-D)\psi) = \\ &= (\varphi, (-D)(-D)\psi) = (\varphi, D^2\psi), \end{aligned} \quad (4.20)$$

откуда $(D^2)^* = D^2$.

В общем случае, когда мы не вводим конкретной нормы, мы можем доказать те же свойства при условии, что скалярное произведение, т. е. билинейный функционал (\cdot, \cdot) , инвариантно по отношению к сдвигу: $(f(x), g(x)) = (f(x+z), g(x+z))$. Дифференцируя это выражение по z и полагая $z = 0$, получаем

$$\begin{aligned} (Df, g) + (f, Dg) &= 0, \quad \text{или} \quad (Df(x), g(x)) = (f(x), (-D)g(x)), \\ \text{т. е.} \quad D^* &= -D. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Результаты для производных высшего порядка можно получить при помощи вышеуказанного приема.

Чтобы объяснить смысл определения (4.2.5), докажем следующую теорему.

Теорема 1. Если $U(t)$ — унитарный оператор, определенный на гильбертовом пространстве, то $U_t = AU$ ¹⁾, где A — антисимметричный оператор, зависящий от t .

Доказательство. Так как $UU^* = U^*U = I$, после дифференцирования по t получаем

$$U_t U^* + U (U^*)_t = 0 \quad \text{и} \quad (U^*)_t U + U^* U_t = 0,$$

$$\text{так что} \quad U_t = -U (U^*)_t (U^*)^{-1} = -U (U^*)_t U = AU, \quad (4.22)$$

$$(U^*)_t = -U^* U_t U^*, \quad (4.23)$$

$$\text{где} \quad A = -U (U^*)_t, \quad \text{так что} \quad A^* = -[(U^*)_t]^* U^* = -U_t U^*,$$

при условии, что $[(U^*)_t]^* = U_t$, т. е. при условии, что операции сопряжения и дифференцирования по t перестановочны. Докажем, что это так.

$$(U\varphi, \psi) = (\varphi, U^*\psi), \quad \varphi, \psi \in H,$$

поэтому, дифференцируя по t , получим $(U_t \varphi, \psi) = (\varphi, (U^*)_t \psi)$. Кроме того, по определению оператора, сопряженного U_t , имеем $((U_t)\varphi, \psi) = (\varphi, (U_t)^*\psi)$. Следовательно, $(U^*)_t = (U_t)^*$, т. е. $[(U^*)_t]^* = U_t$. Из (4.23), используя свойства $U(t)$, выведенные в п. 4.2.4, имеем

$$A^* = -U_t U^* = (U^*)^{-1} (U^*)_t = U (U^*)_t = -A.$$

Таким образом, $A^* = -A$. Это завершает доказательство теоремы. Обратная теорема также верна.

Важным следствием этого результата является тот факт, что унитарные операторы образуют однопараметрическое семейство. Докажем теперь теорему, которая составит основу для наших рассуждений.

Теорема 2. Если $L(t)$ — унитарно эквивалентный оператор, то существует антисимметричный оператор A , зависящий от t , такой, что

$$L_t = [A, L], \quad (4.24)$$

где $[A, L] = AL - LA$ — коммутатор A и L .

Доказательство. $L(t)$ — унитарно эквивалентный оператор, значит, существует однопараметрическое семейство операторов, удовлетворяющих (4.18). Вычислим сначала $(U^{-1})_t$. Пусть $F = Uf$, так что $f = U^{-1}F$. Тогда

$$f_t = [U^{-1}]_t F + U^{-1} F_t = [U^{-1}]_t F + U^{-1} [U_t f + U f_t],$$

$$\text{или} \quad [U^{-1}]_t F = -U^{-1} U_t f = -U^{-1} U_t U^{-1} F.$$

¹⁾ В оригинале вместо буквы A употреблена буква B . Переобозначение связано с почти стандартным термином $(L - A)$ -пары, принятым в литературе. — Прим. перев.

Таким образом, получаем

$$[U^{-1}]_t = -U^{-1}U_tU^{-1}. \quad (4.25)$$

Подставляя уравнения (4.22) и (4.25) в уравнение (4.18), имеем

$$-U^{-1}ALU + U^{-1}L_tU + U^{-1}LAU = 0, \\ \text{или } L_t = AL - LA = [A, L].$$

Теорема доказана.

Понятие *унитарной эквивалентности* очень важно для дальнейшего рассмотрения. Пусть L — унитарно эквивалентный оператор при изменении t и $L\psi = \lambda\psi$, так что λ — собственное значение оператора L . Тогда существует унитарный оператор U , такой, что $U^{-1}LU$ не зависит от t . Отсюда следует, что собственные значения оператора $U^{-1}LU$ также не зависят от t . Заменяя $\psi = U\varphi$ и умножая уравнение $L\psi = \lambda\psi$ слева на U^{-1} , получаем $(U^{-1}LU)\varphi = \lambda\varphi$. Таким образом, *собственные значения унитарно эквивалентного оператора L не зависят от времени*. Итак, мы доказали следующую основную теорему.

Теорема 3. *Собственные значения симметричного оператора L , где u эволюционирует согласно уравнению $u_t = K(u)$, не зависят от времени t , если L — унитарно эквивалентный оператор. Следовательно, собственные значения λ оператора L являются «интегралами» уравнения эволюции.*

Камнем преткновения является вопрос о существовании антисимметричного оператора A , удовлетворяющего уравнению (4.24). В случае уравнения Шредингера мы можем построить такой антисимметричный оператор, тогда как в общем случае мы будем лишь предполагать о его существовании.

Если оператор L может быть выражен в форме $L = L_0 + M$, где L_0 не зависит от u и M линейно зависит от u , то теорема 3 может быть сформулирована в измененной форме. Подобного рода ситуация возникает в случае оператора Шредингера: $L = d^2/dx^2 + 1/6u$, который симметричен и может быть выражен в вышеуказанной форме, если взять

$$L_0 = d^2/dx^2 \quad (\text{не зависит от } u), \\ M = 1/6u \quad (\text{зависит линейно от } u). \quad (4.26)$$

Теорема 4. *Пусть L — симметричный оператор, зависящий от функции u , являющийся решением уравнения*

$$u_t = K(u), \quad (4.27)$$

и пусть он может быть выражен в следующем виде:

$$L = L_0 + M, \quad (4.28)$$

где L_0 не зависит от u , а M зависит линейно от u . Предположим, что существует антисимметричный оператор A , зависящий от u , такой, что

$$[A, L] = M, \quad (4.29)$$

тогда собственные значения L являются «интегралами» уравнения (4.27).

Доказательство. Опуская индекс u при L , имеем $L\psi = L_0\psi + M\psi$. Дифференцируя по t , получаем

$$L_t\psi + L\psi_t = L_0\psi_t + M_t\psi + M\psi_t, \quad \text{или} \quad L_t = M_t. \quad (4.30)$$

Так как M зависит линейно от u , то M_t зависит линейно от u_t , т. е. от $K(u)$. Следовательно, $L_t = M_t$, и из уравнения (4.29) получаем $L_t = [A, L]$. Таким образом, L является унитарно эквивалентным при u , удовлетворяющем (4.27). Теорема доказана.

4.3. Решения типа уединенной волны общего уравнения эволюции

Будем предполагать выполненными следующие теоремы существования и единственности для уравнения эволюции:

$$u_t = K(u). \quad (4.31)$$

Теорема существования. Существует решение уравнения (4.31), соответствующее начальному условию $u(x, 0)$ при условии его достаточной гладкости и стремления к нулю со своими производными любого порядка при $|x| \rightarrow \infty$.

Теорема единственности. Данное начальное условие, удовлетворяющее условиям теоремы существования, определяет единственное решение уравнения (4.31).

В рамках сделанных предположений мы сначала свяжем линейное вариационное уравнение с однопараметрическим семейством решений уравнения (4.31). Можно построить однопараметрическое семейство решений уравнения (4.31), сдвиг начальные условия функциями параметра ε :

$$u_\varepsilon(x, 0) = u_0(x) + \varepsilon f(x). \quad (4.32)$$

В соответствии с начальными данными (4.32) мы имеем однопараметрическое семейство решений уравнения (4.31) $u_\varepsilon(x, t)$, которое для малых значений ε можно записать в виде

$$u_\varepsilon(x, t) = u(x, t) + \varepsilon v(x, t) + O(\varepsilon^2), \quad (4.33)$$

где $u(x, t)$ — решение уравнения (4.31), соответствующее начальному значению $u(x_0)$, но $v(x, t)$ не есть решение уравнения (4.31). Далее установим уравнение эволюции для v . Для этого потребуем следующее: оператор $K(u)$ зависит от u гладко, т. е. функция

$$(d/d\varepsilon) K(u + \varepsilon v)|_{\varepsilon=0} = V(u) v \quad (4.34)$$

определяется единственным образом и является линейной функцией от v , тогда $V(u)$ называется *вариацией* K . Заметим, что левая часть (4.34) есть производная функция $K(u)$ в смысле Фреше. В дальнейшем мы будем обозначать производную Фреше от функции точкой над функцией. Дифференцируя $(u + \varepsilon v)_t = K(u + \varepsilon v)$ по ε и полагая $\varepsilon = 0$, с помощью (4.34) получаем

$$v_t = V(u) v. \quad (4.35)$$

Уравнение (4.35) называется *вариационным уравнением* для

$$v = (du_\varepsilon/d\varepsilon)|_{\varepsilon=0}. \quad (4.36)$$

Пусть $I(u)$ — интеграл уравнения (4.31). Предположим, что $I(u)$ дифференцируем по Фреше, т. е. существует

$$(d/d\varepsilon) I(u + \varepsilon v)|_{\varepsilon=0}, \quad (4.37)$$

и является линейным функционалом от v , который можно представить в виде $(G(u), v)$, так что можно написать

$$\dot{I} = (G(u), v); \quad (4.38)$$

здесь $G(u)$ называется *градиентом* функции $I(u)$. Так как $I(u)$ есть интеграл уравнения (4.31), то $I(u_\varepsilon(t))$ не зависит от t для любого значения ε и значит $(G(u), v)$ также не зависит от t . Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 5. Пусть $u(t)$ — произвольное решение уравнения (4.31) и $v(t)$ — произвольное решение соответствующего вариационного уравнения. Пусть $I(u)$ — интеграл (4.31) и $G(u)$ — его градиент, тогда билинейный функционал $(G(u), v)$ не зависит от t .

Примечание. Этот результат соответствует следующему результату для линейных уравнений. Рассмотрим линеаризованный вариант уравнения КдФ: $u_t + cu_x + u_{xxx} = 0$. Умножая его на u и интегрируя по x от $x = -\infty$ до $x = +\infty$,

получаем $(d/dt) \int_{-\infty}^{+\infty} 1/2 u^2 dx = 0$, предполагая, что $u, u_{xx} \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Таким образом, квадратичный функционал $Q(u, u) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1/2 u^2 dx$ не зависит от t . Назовем его *энергией*. Пусть

теперь u и v — любые два решения данного уравнения. Тогда по *принципу суперпозиции* $u \pm v$ — также решения этого уравнения. Таким образом, квадратичные функционалы $Q(u + v, u + v)$ и $Q(u - v, u - v)$ не зависят от времени t . Складывая их, получаем, что выражение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \{1/2 (u + v)^2 - 1/2 (u - v)^2\} dx = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} uv dx = 2(u, v),$$

которое является билинейным функционалом по u и v , также не зависит от t . Теперь докажем основную теорему Лакса.

Теорема 6. *Предположим, что уравнение эволюции $u_t = K(u)$ удовлетворяет следующим условиям:*

а) $K(u)$ гладко зависит от u , ее вариация есть $V(u)$;
б) уравнение инвариантно по отношению к трансляции по x и сохраняет положительно определенный трансляционно-инвариантный квадратичный функционал, называемый энергией;

в) уравнение имеет решение типа уединенной волны;
г) функции, обращаемые оператором $CD - V^*(s)$ ($D \equiv \partial/\partial x$) в нуль и исчезающие при $\pm \infty$, могут быть лишь кратными s .

Пусть $I(u)$ — интеграл уравнения, такой, что

д) он дифференцируем в смысле Фреше и

е) его градиент $G(u)$ исчезает на $\pm \infty$ при $u = s$.

Тогда $G(s) = \beta s$, где β зависит от I и s , т. е. любое решение типа уединенной волны есть собственная функция градиента интеграла уравнения эволюции.

Доказательство. Пусть v — любое решение вариационного уравнения (предположение а) и $s(\xi)$, $\xi = x - ct$, есть решение типа уединенной волны уравнения (4.31) (предположение в)). Тогда по теореме 5

$$(G(s(x - ct)), v(x, t)) \quad (4.39)$$

не зависит от t . В силу трансляционной инвариантности скалярного произведения (предположение б)),

$$(G(s(x)), v(x + ct, t)) \quad (4.40)$$

не зависит от t . Для краткости запишем

$$v(x + ct, t) = w(x, t), \quad (4.41)$$

тогда (4.40) можно записать в виде

$$(G(s(x)), w(x, t)), \quad (4.42)$$

и это выражение не зависит от t . Дифференцируя (4.42) по t и замечая, что x и t — независимые переменные, получаем

$$(G(s(x)), w_t) = 0, \quad (4.43)$$

где, согласно (4.41), $\omega_t = v_t + cv_x$ и $\omega_x = v_x$, где $X = x + ct$, так что

$$\begin{aligned}\omega_t &= v_t + c\omega_x = V(s(x))\omega + c\omega_x = \\ &= \{cD + V(s(x))\}\omega, \quad D \equiv \partial/\partial x. \quad (4.44)\end{aligned}$$

Подставляя (4.44) в (4.43), имеем

$$(G(s(x)), \{cD + V(s(x))\}\omega) = 0. \quad (4.45)$$

Запишем последнее в сопряженной форме

$$\{(-cD + V^*(s(x)))G(s), \omega\} = 0, \quad (4.46)$$

где V^* — оператор, сопряженный к V . Значение ω в любой момент времени, скажем при $t = 0$, может быть произвольным, следовательно, из (4.46) получим

$$\{-cD + V^*(s(x))\}G(s) = 0. \quad (4.47)$$

Из предположения (б) следует, что (4.31) выражает сохранение энергии, т. е. $(u(t), u(t))$ не зависит от t , так что, дифференцируя по t , имеем $2(u(t), u_t(t)) = 0$, или $2(u, K(u)) = 0$. Начальные значения u произвольны. Введем u_ϵ вместо u . Дифференцируя по ϵ и полагая $\epsilon = 0$, получаем

$$\begin{aligned}(v, K(u)) + (u, V(u)v) &= 0, \text{ или } (v, K(u)) + (V^*(u)u, v) = 0, \text{ или} \\ (v, K(u)) + (v, V^*(u)u) &= 0, \text{ или } (v, K(u) + V^*(u)u) = 0.\end{aligned}$$

Так как v — произвольное решение вариационного уравнения, мы считаем его произвольным в момент t , следовательно, последнее уравнение означает, что

$$K(u) + V^*(u)u = 0. \quad (4.48)$$

Так как мы рассматриваем решения типа уединенной волны, вместо $u(x, t)$ будем писать $s(\xi)$, $\xi = x - ct$, и тогда из (4.31) получим

$$cs_\xi + K(s(\xi)) = 0. \quad (4.49)$$

Подставляя $s(\xi)$ вместо u и $K(s(\xi))$ из (4.49) в (4.48), получаем

$$\begin{aligned}-cs_\xi + V^*(s(\xi))s(\xi) &= 0, \\ \text{или } [-c(d/d\xi) + V^*(s(\xi))]s(\xi) &= 0.\end{aligned} \quad (4.50)$$

Значит решения типа уединенной волны принадлежат ядру линейного оператора

$$c(d/d\xi) - V^*(s(\xi)). \quad (4.51)$$

Сравнивая (4.47) и (4.50) и применяя предположения (г) и (е), имеем

$$G(s(\xi)) = \beta s(\xi), \quad (4.52)$$

где β зависит от s и I , так как G — градиент интеграла $I(s(\xi))$.

Примечание. Граничные условия для $G(s)$ и s не вызывают затруднений, так как по предположениям (г) и (е) обе функции стремятся к нулю при $|\xi| \rightarrow \infty$.

Доказательство теоремы 6 завершено.

4.4. Применение общей теории к уравнению КдФ

Применим общую теорию к уравнению КдФ и посмотрим, придем ли мы к результатам, полученным ранее. Для уравнения $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$

$$K(u) = -(uu_x + u_{xxx}). \quad (4.53)$$

Обозначим однопараметрическое семейство решений этого уравнения через $u_\epsilon(x, t) = u(x, t, \epsilon)$, которое единственным образом определяется однопараметрическим семейством начальных данных $u_\epsilon(x, 0) = u_0 + \epsilon f$. Вариация $K(u)$ дается выражением

$$\begin{aligned} (d/d\epsilon) K(u + \epsilon v)|_{\epsilon=0} &= \\ &= -(d/d\epsilon) \{(u + \epsilon v)(u_x + \epsilon v_x) + u_{xxx} + \epsilon v_{xxx}\}|_{\epsilon=0} = \\ &= -(uv_x + u_x v + v_{xxx}) \equiv V(u)v \quad (\text{в наших обозначениях}), \end{aligned}$$

так что

$$V(u) \equiv -(u_x + uD + D^3) = -(Du + D^3), \quad D = \partial/\partial x. \quad (4.54)$$

Отсюда мы заключаем, что $K(u)$ зависит от u . Следовательно, $K(u)$ удовлетворяет условию (а) теоремы 6.

Исследуем далее сопряженный оператор V^* , определив предварительно скалярное произведение. Так как мы имеем дело с функциями из класса C^∞ на вещественной прямой $(-\infty < x < +\infty)$, достаточно взять скалярное произведение в L_2 . Таким образом,

$$(u, v) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} uv \, dx. \quad (4.55)$$

Из этого определения скалярного произведения имеем

$$\begin{aligned} (V(u)f, g) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d}{dx} (uf) + \frac{d^3 f}{dx^3} \right) g \, dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f \left(u \frac{dg}{dx} + \frac{d^3 g}{dx^3} \right) dx, \end{aligned}$$

так как $f, g, f_x, g_x, f_{xx}, g_{xx} \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Отсюда

$$V^*(u) = uD + D^3. \quad (4.56)$$

Согласно (4.54), вариационное уравнение, определяющее v , в этом случае имеет вид $v_t = -(Du + D^3)v$. Пусть теперь L — оператор Шредингера:

$$L \equiv d^2/dx^2 + 1/6u; \quad (4.57)$$

ясно, что L симметричен. Следовательно, по теореме 3 собственные значения оператора L , в котором функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению КдФ, не зависят от t при условии, что существует антисимметричный оператор A , такой, что

$$L_t = [A, L]. \quad (4.58)$$

Дифференцируя L по t , получаем

$$L_t = (\partial/\partial t)(D^2 + 1/6u) = 1/6u_t = 1/6K(u) = -1/6(uu_x + u_{xxx}). \quad (4.59)$$

Из уравнений (4.58) и (4.59) ясно, что теорема 3 в настоящем случае удовлетворяется, если

$$[A, D^2 + 1/6u] = -1/6(uu_x + u_{xxx}). \quad (4.60)$$

Так как правая часть уравнения (4.60) содержит производные третьего порядка, предположим, что A является следующим антисимметричным оператором третьего порядка: $A = D^3 + bD + Db$. Выполняя дифференцирование, можно показать, что

$$\begin{aligned} & [D^3 + bD + Db, D^2 + 1/6u] \psi = \\ & = (D^3 + bD + Db)(\psi_{xx} + 1/6u\psi) - (D^2 + 1/6u)(\psi_{xxx} + b\psi_x + (b\psi)_x) = \\ & = (1/2u_x - 4b_x)\psi_{xx} + (1/2u_{xx} - 4b_{xx})\psi_x + (1/6u_{xxx} + 1/3bu_x - b_{xxx})\psi. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Чтобы это выражение было просто произведением ψ на функцию в правой части (4.60), мы должны выбрать

$$b = u/8, \quad (4.62)$$

и тогда

$$[A, D^2 + 1/6u] = 1/24(uu_x + u_{xxx}), \quad (4.63)$$

так что (4.60) будет удовлетворяться, если мы возьмем $A = 4(D^3 + bD + Db)$. Это доказывает существование антисимметричного оператора A , удовлетворяющего (4.58). Следовательно, для этого случая имеет место теорема 3 и собственные значения λ оператора Шредингера (4.57) не зависят от t .

Здесь следует отметить удивительную элегантность изложенного выше доказательства. Первые доказательства этого результата были громоздки и основывались в значительной мере на физических соображениях.

Найдем градиент $G(u(t))$ интеграла $\lambda(u(t))$. В соответствии с определением (4.38) имеем

$$(d/de) \lambda(u + \epsilon v)|_{\epsilon=0} = (G(u), v), \quad (4.64)$$

где λ определяется из $L\psi = \lambda\psi$. Беря производную Фреше от последнего уравнения, имеем

$$\dot{L}\psi + L\dot{\psi} = \dot{\lambda}\psi + \lambda\dot{\psi}, \quad (4.65)$$

$$\text{где } \dot{L} = (d/de) \{ (d^2/dx^2) + 1/6(u + \epsilon v) \}|_{\epsilon=0} = 1/6 v. \quad (4.66)$$

Следовательно, (4.65) сводится к уравнению $1/6 v \psi + L\dot{\psi} = \dot{\lambda}\psi + \lambda\dot{\psi}$. Умножая его на ψ и интегрируя по x от $x = -\infty$ до $+\infty$, имеем

$$\dot{\lambda} = \int_{-\infty}^{+\infty} 1/6 v \psi^2 dx = (1/6 \psi^2, v). \quad (4.67)$$

Здесь использованы следующие условия:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^2 dx = 1 \quad (\text{условие нормировки } \psi),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L[\psi] \psi dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\psi} L[\psi] dx \quad (L \text{ симметричен}).$$

Следовательно, из (4.64) и (4.67) имеем

$$G(u) = 1/6 \psi^2. \quad (4.68)$$

Таким образом, $\lambda(u)$ удовлетворяет условиям (д) и (е) теоремы 6, а именно $\lambda(u)$ дифференцируема в смысле Фреше и $G(s) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, так как $\psi \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Условие (в) теоремы 6 также выполняется, потому что мы показали в гл. 3 существование решений типа уединенной волны для уравнения КдФ. Условие (б) теоремы 6 также выполняется, поскольку для уравнения КдФ квадратичный функционал (u, u) не зависит от времени.

Докажем, что условие (г) теоремы 6 для настоящего случая также выполняется. Пусть X — функция, обращающаяся в нуль оператором $cD - V^*(s)$, так что $X \rightarrow 0$ при $\xi = x - ct \rightarrow \pm \infty$. Тогда имеем

$$c(dX/d\xi) - s(\xi)(dX/d\xi) - d^3X/d\xi^3 = 0. \quad (4.69)$$

Если теперь перейдем в уравнении КдФ к координате ξ , то для решения типа уединенной волны $u(x, t) = s(\xi)$ получим

$$c(ds/d\xi) - s(\xi)(ds/d\xi) - d^3s/d\xi^3 = 0, \quad (4.70)$$

где $s \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \pm\infty$. Итак, из уравнений (4.69) и (4.70) получаем

$$X = \alpha s, \quad \text{где } \alpha - \text{константа.} \quad (4.71)$$

Предыдущее рассмотрение показывает, что уравнение КдФ, так же как и интеграл $\lambda(u)$, удовлетворяет всем условиям теоремы 6. Поэтому имеем

$$G(s) \equiv \frac{1}{6}\psi^2 = \beta s, \quad (4.72)$$

где β зависит от $\lambda(s)$ и c . Из (4.72) получаем

$$\psi = \sqrt{6\beta s}. \quad (4.73)$$

Чтобы установить соотношение между интегралом $\lambda(s)$, который является собственным значением оператора Шредингера $L^2 + \frac{1}{6}s$, где s — решение типа уединенной волны уравнения КдФ, и собственной скоростью $c(s)$, поступим следующим образом. Дифференцируя дважды собственную функцию ψ оператора Шредингера, заданную выражением (4.73), получим

$$\psi_x = \frac{1}{2} \sqrt{6\beta/s} s_\xi, \quad \psi_{xx} = \frac{1}{2} \sqrt{6\beta/s^3} [ss_{\xi\xi} - \frac{1}{2}s_\xi^2],$$

так что $\psi_{xx} + \frac{1}{6}s\psi = \sqrt{6\beta s} \frac{1}{4}c(s).$ (4.74)

Здесь учтены формулы $s_{\xi\xi} = cs - \frac{1}{2}s^2$, $s_\xi^2 = cs^2 - \frac{1}{3}s^3$, полученные путем двукратного интегрирования (4.70) и использования граничных условий на s и производных от s при $\xi \rightarrow \pm\infty$. Левая часть (4.74) равна также $\lambda(s)\psi$:

$$\lambda(s)\psi = \sqrt{6\beta s} \lambda(s). \quad (4.75)$$

Поэтому из (4.74) и (4.75) получаем следующий важный результат:

$$c(s) = 4\lambda(s) = 4\kappa^2(s), \quad (4.76)$$

который доказан в гл. 3 методом обратной задачи рассеяния. На самом деле в гл. 3 мы доказали более общий результат: если решение $u(x, t)$ уравнения КдФ есть безотражательный потенциал уравнения Шредингера, то собственному значению κ_p^2 оператора Шредингера $d^2/dx^2 + \frac{1}{2}u$ соответствует солитон, движущийся со скоростью $4\kappa_p^2$ на бесконечности. Мы должны, однако, связать эти собственные скорости с произвольным решением $u(x, t)$ уравнения КдФ, которое не обязательно является безотражательным потенциалом, но заключается в себе эти индивидуальные солитоны, проявляющиеся только в асимптотическом поведении $u(x, t)$. Этот вопрос мы обсудим в следующем разделе.

4.5. Собственные скорости общего решения уравнения КдФ

Докажем, что если c — собственная скорость решения уравнения КдФ (не обязательно безотражательного), то $1/4c$ является собственным значением оператора Шредингера $d^2/dx^2 + 1/6u$.

Пусть $u(x, t)$ — произвольное решение уравнения КдФ, асимптотически распадающееся на некоторое число уединенных волн. Рассмотрим одну из них: $u = s(\xi)$, $\xi = x - ct$, движущуюся со скоростью c , т. е.

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \pm \infty \\ \xi \text{ фикс.}}} u(x, t) = s(\xi - \theta^\pm), \quad (4.77)$$

где θ^\pm — константы. Следовательно, для любых положительных чисел ε и X существует положительное число $T(X, \varepsilon)$, такое, что

$$|u(\xi + ct, t) - s(\xi - \theta)| \leq \varepsilon \quad (4.78)$$

$$\text{для всех } t: |t| > T \text{ и для всех } \xi: |\xi| < X. \quad (4.79)$$

Заметим, что X может быть сколь угодно большим. Однако $\lim_{X \rightarrow \infty} T(X, \varepsilon) = \infty$ для фиксированного ε . При $t = T$ неравенство (4.78) принимает вид

$$|u(\xi + cT, T) - s(\xi - \theta)| < \varepsilon \quad (4.80)$$

$$\text{для всех } \xi: |\xi| < X \text{ или } cT - X < x < cT + X.$$

Пусть L_T — оператор Шредингера $d^2/dx^2 + 1/6u(x, t)$, записанный для $t = T$. Сначала докажем, что $1/4c$ является приближенным собственным значением, а $\psi_T = s^{1/2}(x - cT - \theta)$ — приближенной собственной функцией оператора L_T в том смысле, что

$$\|L_T \psi_T - 1/4c \psi_T\| < \delta \|\psi_T\|, \quad (4.81)$$

где $\|\cdot\|$ — норма в L_2 и $\delta \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $X \rightarrow \infty$. Заметим, что ψ_T является собственной функцией, соответствующей собственному значению $1/4c$ оператора $d^2/dx^2 + 1/6s(x - cT - \theta)$, а не L_T . В общем случае ψ_T не является собственной функцией оператора L_T . Итак,

$$\begin{aligned} |L_T \psi_T - 1/4c \psi_T| &= |\{d^2/dx^2 + 1/6u(x, T) - 1/4c\} \psi_T| = \\ &= |\{d^2/dx^2 + 1/6s(x - cT - \theta) - 1/4c\} \psi_T + \\ &+ 1/6\{u(x, T) - s(x - cT - \theta)\} \psi_T| = \\ &= 1/6|u(x, T) - s(x - cT - \theta)| \psi_T < 1/6\varepsilon \psi_T, \end{aligned} \quad (4.82)$$

что следует из (4.80) при $cT - X \leq x \leq cT + X$. В этом интервале неравенство (4.82) дает оценку для $L_T \psi_T - 1/4c \psi_T$.

Получим теперь оценку для этого выражения вне указанного интервала.

В области вне интервала $(cT - X, cT + X)$ поступим следующим образом. Предполагая, что решения уравнения КдФ равномерно ограничены по времени, обозначим через M верхнюю грань $u(x, t)$. Затем из соотношения

$$|L_T \psi_T - 1/4 c \psi_T| = 1/6 |u(x, T) - s(x - cT - \theta)| \psi_T$$

и выражения (4.8) для s получим

$$|L_T \psi_T - 1/4 c \psi_T| < 1/6 (M + 3c) \psi_T. \quad (4.83)$$

На интервале $x < cT - X$, используя $\psi_T = s^{1/2}$, имеем

$$\begin{aligned} \psi_T &= \sqrt{3c} \operatorname{sech} \{ (\sqrt{c}/2)(x - cT - \theta) \} = \\ &= \frac{2\sqrt{3c}}{\exp \{ (\sqrt{c}/2)(x - cT - \theta) \} + \exp \{ (-\sqrt{c}/2)(x - cT - \theta) \}} < \\ &< 2\sqrt{3c} \exp \{ (\sqrt{c}/2)(x - cT - \theta) \}. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Аналогично для $x > cT + X$ получим

$$\psi_T < 2\sqrt{3c} \exp \{ -\sqrt{c}(x - cT - \theta)/2 \}. \quad (4.85)$$

Поэтому, согласно выбранной норме,

$$\|L_T \psi_T - 1/4 c \psi_T\|^2 = \left[\int_{-\infty}^{cT-X} + \int_{cT-X}^{cT+X} + \int_{cT+X}^{\infty} \right] \{L_T \psi_T - 1/4 c \psi_T\}^2 dx.$$

Из неравенств (4.82)–(4.85) получим

$$\begin{aligned} \|L_T \psi_T - 1/4 c \psi_T\|^2 &\leq \\ &\leq 1/36 \varepsilon^2 \int_{cT-X}^{cT+X} \psi_T^2 dx + 1/3c (M + 3c)^2 \left[\int_{-\infty}^{cT-X} \exp \{ \sqrt{c}(x - cT - \theta) \} dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{cT+X}^{\infty} \exp \{ -\sqrt{c}(x - cT - \theta) \} dx \right], \end{aligned}$$

$$\text{или } \|L_T \psi_T - 1/4 c \psi_T\|^2 <$$

$$\begin{aligned} &< (1/36 \varepsilon^2 + 1/3 \sqrt{c} (M + 3c)^2 \{ \exp \{ -\sqrt{c}(X + \theta) \} + \\ &\quad + \exp \{ -\sqrt{c}(x - \theta) \} \} / \|\psi_T\|^2) \cdot \|\psi_T\|^2. \end{aligned}$$

Так как норма $\|\psi_T\|$ не равна нулю и конечна, то из полученного неравенства вытекает (4.81), где $\delta \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $X \rightarrow \infty$. Таким образом, $c/4$ лежит в δ -окрестности точки спектра оператора $L_T \equiv d^2/dx^2 + 1/6 u(x, T)$. Так как $\delta \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $X \rightarrow \infty$, а спектр оператора L_T не зависит от T , то мы заключаем, что $c/4$ — собственное значение оператора $L \equiv d^2/dx^2 + 1/6 u(x, t)$.

ЛИТЕРАТУРА

Лакс (Lax P. D.)

- [1968] Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. — *Communs. Pure and Appl. Math.*, v. 21, p. 467—490.
[Имеется перевод: Лэкс П. Д., Интегралы нелинейных эволюционных уравнений и уединенные волны. — В сб.: Математика, 13 : 5, (1969), с. 128—150.]

Люстерник Л. А., Соболев Л. И.

- [1951] Элементы функционального анализа. — М.: ГИТТЛ.

Миура, Гарднер, Крускал (Miura R. M., Gardner C. S., Kruskal M. D.)

- [1968] Korteweg — de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion. — *J. Math. Phys.*, v. 9, p. 1204—1209.

Прайс (Price J. D.)

- [1973] Basic methods of linear functional analysis. — London: Hiltchinson University Library.

Сьёберг (Sjöberg A.)

- [1967] On the Korteweg — de Vries equation. — Upsala University Department of Computer Science Report.

Групповая скорость; нелинейные волны

5.1. Введение

При изучении линейных волн в гл. 1 были выявлены следующие факты:

1. Линейная волна в однородной консервативной диспергирующей среде, первоначально гармоническая (т. е. с параметрами k , ω , a , V_p и V_g , не зависящими от x и t), по истечении достаточно большого времени ($t \gg P$) превращается в неоднородный цуг волн увеличивающейся длины, вдоль которого параметры k , ω , a , V_p и V_g медленно меняются с изменением x и t (точнее говоря, их комбинации x/t).

2. Значительные изменения (т. е. порядка $O(1)$) этих параметров имеют место на отрезках длины порядка $L = O(x)$ и времени порядка $T = O(t)$.

3. Следовательно, мы могли рассматривать эту волну как гармоническую, с медленно меняющимися параметрами на отрезках длины $\lambda \ll X \ll L$ и времени $P \ll \tau \ll T$, где λ — длина волны, P — начальный период.

4. Используя дисперсионное соотношение и применяя фурье-анализ к волновому уравнению, мы получили математическое выражение для групповой скорости волны $V_g = \omega'(k)$.

5. Используя асимптотическое поведение при $t \rightarrow \infty$ точного решения задачи с начальными условиями, мы смогли дать *физическое* истолкование распространения волнового числа, частоты и энергии волны, распространяющейся с групповой скоростью.

Нелинейное волновое уравнение не может быть решено методом разложения решения на фурье-компоненты, и для определения таких характеристик нелинейной волны, как волновое число, период и т. д., нам придется развить специальный метод. Иначе говоря, нелинейные уравнения не допускают решения вида

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} A(k) \exp[i\{kx - \omega(k)t\}] dk.$$

Однако в гл. 2 мы видели, что они имеют простейшие решения, описывающие однородные волновые цуги в движущейся системе координат $\xi = x - ct$, где c — скорость системы координат. Изучение именно этих *стационарных* решений позво-

лит нам придать физический смысл указанным выше характеристикам волны: волновому числу, частоте, групповой скорости и т. д.

5.2. Процедура усреднения

Изучение уравнения КдФ показало, что оно допускает стационарное решение вида

$$\Phi_{\xi}^2 = F(\Phi; c, A_i), \quad (5.1)$$

$$\text{что дает } \Phi = \Phi(\xi; c, A_i), \quad \xi = x - ct,$$

где A_i — константы интегрирования, число которых зависит от порядка уравнения относительно пространственных производных. В данной главе мы будем рассматривать только такие нелинейные уравнения, которые имеют решения вида (5.1).

Очевидно, что решение такого вида осциллирует между двумя последовательными нулями функции F , скажем $\Phi_1(c, A_i)$ и $\Phi_2(c, A_i)$; причем $\Phi_2 > \Phi_1$; при этом функция F в этом интервале положительно определена. Условие положительной определенности F между Φ_1 и Φ_2 необходимо для обеспечения вещественности Φ_{ξ} . Пусть ξ_1 и ξ_2 — значения ξ , при которых

$$\Phi(\xi_1; c, A_i) = \Phi_1(c, A_i), \quad \Phi(\xi_2; c, A_i) = \Phi_2(c, A_i). \quad (5.2)$$

Тогда по аналогии с линейной волной мы можем определить длину волны λ для нелинейной волны:

$$\lambda = \lambda(c, A_i) = 2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi = \quad (5.3a)$$

$$= 2 \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi / \Phi_{\xi} = \quad (5.3b)$$

$$= 2 \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi / \sqrt{F(\Phi, c, A_i)}, \quad (5.3b)$$

и затем волновое число k определяется обычным образом:

$$k = k(c, A_i) = 2\pi/\lambda(c, A_i), \quad (5.4)$$

а частота ω — в виде

$$\omega = \omega(c, A_i) = ck(c, A_i). \quad (5.5)$$

Для периода волны мы имеем следующее выражение:

$$P = P(c, A_i) = 2\pi/\omega(c, A_i). \quad (5.6)$$

Для краткости записи мы не будем всякий раз показывать явно зависимость k , ω , λ , P от c и A_i . Решение (5.1), где c и

A_i — константы, описывает волну локально. По прямой аналогии с линейными волнами мы можем получить более общее решение, полагая c и A_i медленно меняющимися функциями x и t . Далее будет разработан метод определения зависимости этих параметров от x, t .

Сначала мы должны ввести некоторую процедуру усреднения, чтобы исключить быстрые осцилляции полевых переменных, имеющие место на малых отрезках изменения ($x \sim \lambda, t \sim P$). Только тогда можно рассматривать медленные изменения параметров c и A_i и через них изменения параметров k, ω и т. д. Чтобы избежать в процедуре усреднения потерю существенных изменений величин k, ω и т. д., ограничимся рассмотрением временных и пространственных интервалов, много меньших чем T и L . Предыдущее обсуждение предполагает введение функций от X и τ , принимающих промежуточные значения

$$\lambda \ll X \ll L, \quad P \ll \tau \ll T, \quad (5.7)$$

и поэтому мы определим среднее $F(x, t)$ в произвольной точке x для фиксированного значения времени t соотношением

$$\bar{F}(x, t) = \frac{1}{2X} \int_{x-X}^{x+X} F(x', t) dx'. \quad (5.8)$$

Для проведения усреднения Уизем записал основные уравнения в форме законов сохранения. Мы воспользуемся законом сохранения

$$P_t + Q_x = 0. \quad (5.9)$$

Подвергнем его процедуре усреднения с целью получить дифференциальные уравнения для определения c и A_i , которые не содержат x, t явно. Тогда

$$\bar{P}_t = \frac{1}{2X} \int_{x-X}^{x+X} \frac{\partial}{\partial t} P(x', t) dx' = (\bar{P})_t, \quad (5.10a)$$

$$\begin{aligned} \bar{Q}_x &= \frac{1}{2X} \int_{x-X}^{x+X} \frac{\partial}{\partial x'} Q(x', t) dx' = \frac{1}{2X} [Q(x+X, t) - Q(x-X, t)] = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2X} \int_{x-X}^{x+X} Q(x', t) dx' = (\bar{Q})_x. \end{aligned} \quad (5.10b)$$

Таким образом, усредняя (5.9), получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{P}(x, t, c, A_i) + \frac{\partial}{\partial x} \bar{Q}(x, t, c, A_i) = 0. \quad (5.11)$$

Уизем указывает, что преимущество выбора закона сохранения в качестве исходного уравнения состоит в том, что оба члена в уравнении (5.11) одного и того же порядка λ/L . Если бы в нем фигурировал недифференцируемый член, скажем R , то для того, чтобы подсчитать его с точностью до порядка λ/L , потребовалось бы более детальное решение, чем (5.1).

Заметим, что в уравнении (5.11) величины \bar{P} и \bar{Q} по-прежнему зависят явно от x и t . Для устранения этой явной зависимости рассуждаем следующим образом. Интервал $(x - X, x + X)$, где X много больше λ , содержит большое количество волн, для которых в силу (5.7) мы можем считать k , ω и т. д. более или менее постоянными величинами. В этом случае мы можем заменить \bar{P} и \bar{Q} соответственно величинами $\bar{P}(c, A_i)$ и $\bar{Q}(c, A_i)$, которые усреднены при сохранении k , ω и т. д. постоянными на интервале $(x - X, x + X)$. Ясно, что в этом приближении возникающие ошибки имеют порядок λ/L , X/L , которые являются малыми величинами в силу (5.7).

Теперь заметим, что среднее \bar{F} есть приблизительно то же, что и среднее от F по периоду. Это опять следует из большого числа волн постоянной амплитуды на интервале $(x - X, x + X)$. Таким образом,

$$\begin{aligned}\bar{P}(c, A_i) &= \frac{1}{\lambda} \int_x^{x+\lambda} P(x', t) dx' = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda P(X, t) dX = \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda P(\Phi, c, A_i) dX, \quad x' = x + X, \quad (5.12)\end{aligned}$$

где $P(\Phi)$ отражает функциональную зависимость от Φ . В терминах средних, определенных в (5.12), усредненный закон сохранения выглядит так:

$$(\partial/\partial t) \bar{P}(c, A_i) + (\partial/\partial x) \bar{Q}(c, A_i) = 0, \quad (5.13)$$

где c и A_i — медленно меняющиеся функции x и t .

Теперь мы знаем, что для определенных задач имеется бесконечное число законов сохранения и, следовательно, бесконечное число усредненных уравнений типа (5.13). Поэтому для успеха применения этого метода важно знать, что из этого бесконечного числа уравнений сохранения независимых уравнений ровно столько, сколько параметров c и A_i , которые мы должны определить. Во всех задачах, рассмотренных до сих пор, число независимых осредненных уравнений сохранения в точности равно числу неизвестных параметров. Однако до сих пор нет общего доказательства этого факта, и

секрет доказательства предположительно заключается в трансформационных свойствах основной системы уравнений.

Различные исследования показали, что если по аналогии с адиабатическим инвариантом $I = \oint p dq$ в гамильтоновой механике ввести функцию $W(c, A_i) \equiv \oint \Phi_{\xi} d\Phi$, то во многих случаях удастся выразить волновое число, частоту и другие параметры, связанные с волной, через первые частные производные от W по c и A_i . Более того, во многих случаях система уравнений в частных производных, определяющая эти производные от W , оказывается гиперболической. Следовательно, находя характеристики гиперболической системы, мы определим характеристические скорости для данной волны. Соответствующие условия совместности дают величины, постоянные вдоль этих характеристик. В общем случае мы имеем более чем одну характеристическую скорость; мы должны уточнить, которая из них будет определяться как групповая скорость. Прямая аналогия с линейным случаем не поможет, если все характеристические скорости окажутся равными групповой скорости. Этот вопрос мы рассмотрим еще раз в связи с примерами, которые обсудим в следующем разделе.

5.3. Примеры

В этом разделе рассмотрим приложения вышеописанного метода Уизема на примерах, которые также были рассмотрены Уиземом. Для проверки надежности метода Уизема сначала решим линейное уравнение, а затем — два нелинейных уравнения, одно из которых будет уравнением КдФ.

5.3.1. Линейная волна

Применим сначала метод разд. 5.2 к следующему линейному уравнению:

$$\Phi_{tt} - \Phi_{xx} + \Phi = 0, \quad (5.14)$$

которое остается инвариантным под действием преобразований $x \rightarrow -x$ и $t \rightarrow -t$. Чтобы получить стационарное решение, положим

$$\xi = x - ct. \quad (5.15)$$

Тогда (5.14) принимает вид

$$(c^2 - 1)\Phi_{\xi\xi} + \Phi = 0. \quad (5.16)$$

Интегрируя его, получим

$$\Phi_{\xi} = (1/\sqrt{c^2 - 1}) \sqrt{2A - \Phi^2}$$

для положительной ветви, причем

$$\xi = \sqrt{c^2 - 1} \int d\Phi / \sqrt{2A - \Phi^2}. \quad (5.17)$$

Таким образом,

$$\Phi(\xi; c, A) = \sqrt{2A} \cos[(\xi - \xi_0) / \sqrt{c^2 - 1}]. \quad (5.18)$$

Функция $\Phi(\xi)$ осциллирует между $-\sqrt{2A}$ и $\sqrt{2A}$, поэтому определим

$$\lambda(c, A) = 2\sqrt{c^2 - 1} \int_{-\sqrt{2A}}^{\sqrt{2A}} d\Phi / \sqrt{2A - \Phi^2} = 2\pi\sqrt{c^2 - 1} \quad (5.19)$$

и затем

$$k(c, A) = 1/\sqrt{c^2 - 1}, \quad (5.20)$$

$$\omega(c, A) = c/\sqrt{c^2 - 1} = \sqrt{1 + k^2}. \quad (5.21)$$

Подставляя $\varphi \sim \exp\{i(kx - \omega t)\}$ в (5.14), получаем дисперсионные соотношения $\omega = \pm \sqrt{1 + k^2}$, одно из которых совпадает с (5.21). Умножая (5.14) на φ_t и φ_x и перегруппировывая члены, получаем следующие уравнения сохранения, которых достаточно для определения изменения c и A с изменением x и t :

$$[1/2\varphi_t^2 + 1/2\varphi_x^2 + 1/2\varphi^2]_t + [-\varphi_t\varphi_x]_x = 0, \quad (5.22a)$$

$$[-\varphi_x\varphi_t]_t + [1/2\varphi_t^2 + 1/2\varphi_x^2 - 1/2\varphi^2]_x = 0, \quad (5.22b)$$

из которых в силу (5.15) следует

$$[1/2(c^2 + 1)\Phi_\xi^2 + 1/2\Phi^2]_t + [c\Phi_\xi^2]_x = 0, \quad (5.22в)$$

$$[c\Phi_\xi^2]_t + [1/2(c^2 + 1)\Phi_\xi^2 - 1/2\Phi^2]_x = 0. \quad (5.22г)$$

Подставляя значения Φ и Φ_ξ из (5.18) в (5.22в) и (5.22г), получаем

$$\left\{ \frac{c^2 + 1}{c^2 - 1} A - \frac{2A}{c^2 - 1} \cos^2 \frac{\xi - \xi_0}{\sqrt{c^2 - 1}} \right\}_t + \left\{ \frac{2Ac}{c^2 - 1} \sin^2 \frac{\xi - \xi_0}{\sqrt{c^2 - 1}} \right\}_x = 0, \quad (5.22д)$$

$$\left\{ \frac{2Ac}{c^2 - 1} \sin^2 \frac{\xi - \xi_0}{\sqrt{c^2 - 1}} \right\}_t + \left\{ \frac{c^2 + 1}{c^2 - 1} A - \frac{2Ac^2}{c^2 - 1} \cos^2 \frac{\xi - \xi_0}{\sqrt{c^2 - 1}} \right\}_x = 0. \quad (5.22е)$$

При осреднении по длине волны эти уравнения принимают вид

$$(\partial/\partial t)(Ac^2/\sqrt{c^2 - 1}) + (\partial/\partial x)(Ac/(c^2 - 1)) = 0, \quad (5.23a)$$

$$(\partial/\partial t)(Ac/(c^2 - 1)) + (\partial/\partial x)(A/(c^2 - 1)) = 0. \quad (5.23б)$$

Так как нас интересует изменение волнового числа k , выраженного только через s в уравнении (5.20), и амплитуды $a = 2A$, перепишем наши уравнения в виде

$$a^2 \left\{ k k_t + \frac{1}{2} \frac{k_x (2k^2 + 1)}{\sqrt{k^2 + 1}} \right\} + a (k^2 + 1) \left\{ a_t + \frac{k}{\sqrt{k^2 + 1}} a_x \right\} = 0,$$

$$a \left\{ a_t + \frac{k}{\sqrt{k^2 + 1}} a_x \right\} + a^2 \left\{ \frac{2k^2 + 1}{2k(k^2 + 1)} k_t + \frac{k_x}{\sqrt{k^2 + 1}} \right\} = 0.$$

Комбинируя их соответствующим образом, в силу дисперсионного уравнения (5.21) получаем

$$k_t + \omega'(k) k_x = 0, \quad (5.24a)$$

$$a_t + \omega'(k) a_x + (a/2) \omega''(k) k_x = 0. \quad (5.24b)$$

Эти уравнения имеют «двойную» характеристику

$$dx/dt = \omega'(k), \quad (5.25)$$

вдоль которой

$$k = \text{const}, \quad (5.26a)$$

$$da/dt = -\frac{1}{2} \omega''(k) k_x a. \quad (5.26b)$$

Итак, в случае линейного уравнения (5.14) система, определяющая изменения k и a , является *параболической* и существует только одна характеристическая скорость, которая равна групповой.

Общее решение уравнения (5.24a) имеет форму $x - \omega'(k)t = f(k)$, где f — произвольная функция. Записывая это решение в форме $x/t - \omega'(k) = (1/t)f(k)$, для больших значений x и t находим

$$x = \omega'(k)t. \quad (5.27)$$

Из уравнения (5.26b) видно, что, когда мы движемся с групповой скоростью, амплитуда изменяется как

$$a = a_0 / \sqrt{t}. \quad (5.28)$$

Таким образом, амплитуда убывает обратно пропорционально квадратному корню из t , что подтверждает общий результат, полученный в гл. 1.

Определим скорость распространения энергии. Пусть Δx — расстояние между двумя соседними характеристиками, отвечающими k и $k + dk$. Так как энергия пропорциональна квадрату амплитуды, то в силу уравнений (5.25) и (5.26b) производная по времени от изменения энергии между двумя характеристиками пропорциональна

$$(d/dt)(a^2 \Delta x) = 2a \Delta x (da/dt) + a^2 (d/dt) \Delta x = O(\Delta x)^2. \quad (5.29)$$

Значит, энергия также распространяется с групповой скоростью. Так же как в линейной задаче, мы имеем одну характеристическую скорость, а именно групповую скорость.

5.3.2. Нелинейное волновое уравнение

Изучим далее нелинейное волновое уравнение

$$\Phi_{tt} - \Phi_{xx} + V'(\Phi) = 0, \quad (5.30)$$

где $V(\Phi)$ — нелинейная функция, как предполагалось в разд. 5.3.1. Как и в предыдущем разделе, мы можем легко вывести уравнения сохранения

$$[1/2\Phi_t^2 + 1/2\Phi_x^2 + V]_t + [-\Phi_t\Phi_x]_x = 0, \quad (5.31a)$$

$$[-\Phi_x\Phi_t]_t + [1/2\Phi_t^2 + 1/2\Phi_x^2 - V]_x = 0. \quad (5.31b)$$

Здесь стационарное решение дается формулой

$$\Phi = \Phi(\xi; c, A), \quad \xi = x - ct, \quad (5.32a)$$

$$\text{где } \Phi_\xi = [(2/(c^2 - 1)) \{A - V(\Phi)\}]^{1/2}. \quad (5.32b)$$

Предполагая $c^2 > 1$, $A > V(\Phi)$, получаем

$$\xi = \sqrt{(c^2 - 1)/2} \int d\Phi / \sqrt{A - V(\Phi)}, \quad (5.33a)$$

$$\lambda = \lambda(c, A) = \sqrt{2(c^2 - 1)} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi / \sqrt{A - V(\Phi)}, \quad (5.33b)$$

где Φ_1 и Φ_2 — нули уравнения

$$A - V(\Phi) = 0, \quad (5.34)$$

между которыми левая часть последнего уравнения положительна. Следуя общей теории, рассмотренной в разд. 5.2, введем

$$W(c, A) = (c^2 - 1) \oint \Phi_\xi d\Phi = \quad (5.35a)$$

$$= \sqrt{2(c^2 - 1)} \oint \sqrt{A - V(\Phi)} d\Phi = \quad (5.35b)$$

$$= \sqrt{c^2 - 1} G(A), \quad (5.35b)$$

$$\text{где } G(A) = \sqrt{2} \oint \sqrt{A - V(\Phi)} d\Phi \quad (5.36)$$

зависит только от A и не зависит от c . Дифференцируя по A , получаем

$$G'(A) = \frac{1}{\sqrt{2}} \oint \frac{d\Phi}{\sqrt{A - V(\Phi)}} = \frac{1}{\sqrt{c^2 - 1}} \oint d\xi = \frac{\lambda}{\sqrt{c^2 - 1}}, \quad (5.37)$$

$$G''(A) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \oint \frac{d\Phi}{\{A - V(\Phi)\}^{3/2}} = -\frac{1}{(c^2 - 1)^{3/2}} \int_0^\lambda \frac{d\xi}{\Phi_\xi^2} < 0. \quad (5.38)$$

Мы можем также записать $G(A)$ в виде

$$G(A) = \int_0^\lambda (c^2 - 1) \Phi_\xi^2 d\xi > 0. \quad (5.39)$$

Беря частную производную (5.35в) по A , из (5.37) находим

$$W_A = \sqrt{c^2 - 1} G'(A) = \lambda(c, A). \quad (5.40)$$

Определим волновое число k соотношением

$$k = 1/\lambda = 1/W_A, \text{ или } kW_A = 1, \quad (5.41)$$

где мы для удобства опустили множитель 2π . Как только определена длина волны λ , сразу можно вычислить средние значения $\overline{p(\Phi)}$ интегрированием в пределах длины волны:

$$\overline{p(\Phi)} = (1/\lambda) \int_0^\lambda p(\Phi) d\xi = k \oint (p(\Phi)/\Phi_\xi) d\Phi. \quad (5.42)$$

В силу предыдущего определения среднего значения имеем

$$1/2 \Phi_t^2 + 1/2 \Phi_x^2 = 1/2 (c^2 + 1) \Phi_\xi^2 = 1/2 k [(c^2 + 1)/(c^2 - 1)] W, \quad (5.43a)$$

$$-\Phi_t \Phi_x = c \Phi_\xi^2 = [kc/(c^2 - 1)] W, \quad (5.43b)$$

$$\overline{V(\Phi)} = A - 1/2 (c^2 - 1) \Phi_\xi^2 = A - 1/2 kW. \quad (5.43в)$$

Беря частную производную от (5.35б) по c , получаем

$$W_c = [c/(c^2 - 1)] W. \quad (5.44)$$

Подставляя эти усредненные выражения в уравнение сохранения, имеем следующее осредненное уравнение сохранения:

$$(\partial/\partial t) \{k(cW_c + AW_A - W)\} + \\ + (\partial/\partial x) \{kc(cW_c + AW_A - W) - cA\} = 0, \quad (5.45)$$

$$(\partial/\partial t)(kW_c) + (\partial/\partial x)(ckW_c - A) = 0, \quad (5.46)$$

где при записи второго члена в уравнении (5.45) мы добавили $kcAW_A$ и вычли эквивалентное ему выражение cA . Выполняя дифференцирование и собирая коэффициенты при c , A и W , имеем

$$c \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (kW_c) + \frac{\partial}{\partial x} (ckW_c - A) \right\} + A \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (kW_A) + \frac{\partial}{\partial x} (ckW_A - c) \right\} - \\ - W \left\{ \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (kc) \right\} = 0, \\ \text{или } k_t + (ko)_x = 0, \quad (5.47)$$

так как коэффициент при c равен нулю в силу (5.46) и коэффициент при A тоже равен нулю в силу $kW_A = 1$.

Определяя частоту через волновое число k и волновую скорость c , имеем $\omega = kc$, так что уравнение (5.47) можно записать в виде

$$k_t + \omega_x = 0 \quad \text{или} \quad k_t + \omega'(k)k_x = 0. \quad (5.48)$$

Уравнение (5.48) чрезвычайно важно, так как мы установили кинематическое соотношение $k_t + \omega_x = 0$, основываясь целиком на процедуре усреднения. Более того, вдоль характеристики $dx/dt = \omega'(k)$ волновое число k (и, следовательно, ω) сохраняется.

Мы можем записать два независимых усредненных уравнения сохранения в удобной форме:

$$DW_A/Dt - W_A \partial c / \partial x = 0, \quad (5.49)$$

$$DW_c/Dt - W_A \partial A / \partial x = 0, \quad (5.50)$$

$$\text{где} \quad D/Dt \equiv \partial/\partial t + c \partial/\partial x. \quad (5.51)$$

Выражая неизвестные в этих уравнениях через A и c с помощью соотношений (5.40) и (5.44) (после замены W на G), получим уравнения

$$G''A_t + cG''A_x + [cG'/(c^2 - 1)]c_t + [G'/(c^2 - 1)]c_x = 0, \quad (5.52)$$

$$cG'A_t + G'A_x - [G/(c^2 - 1)]c_t - [Gc/(c^2 - 1)]c_x = 0, \quad (5.53)$$

которые имеют следующие две характеристики:

$$C_{\pm}: \quad dx/dt = (1 \pm \alpha)/(c \pm \alpha), \quad \alpha = (-GG''/G'^2)^{1/2} \quad (5.54)$$

с соотношениями совместности на характеристиках

$$dc/(c^2 - 1) - \sqrt{-G''/G} dA = 0 \quad \text{вдоль} \quad C_+, \quad (5.55)$$

$$dc/(c^2 - 1) + \sqrt{-G''/G} dA = 0 \quad \text{вдоль} \quad C_-.$$

Эти уравнения определяют два инварианта Римана

$$r = \int_{c_0}^c dc/(c^2 - 1) - \int_{A_0}^A (-G''/G)^{1/2} dA, \quad (5.56)$$

$$s = \int_{c_0}^c dc/(c^2 - 1) + \int_{A_0}^A (-G''/G)^{1/2} dA.$$

Уравнение (5.54) определяет две характеристические скорости $(1 \pm \alpha)/(c \pm \alpha)$. Этот факт отражает природу решения. Рассмотрим, например, цуг волн, имевший вначале постоянную форму с $A = A_0$ и $c = c_0$ вне некоторого ограниченного отрезка. После некоторого периода взаимодействия

возмущение разделяется на две простые волны, разделенные областью постоянных значений A и c . В одной простой волне характеристики C_+ суть прямые линии, на которых r — константы, и другой инвариант Римана — константа во всей области. Во второй простой волне r постоянно везде, а s — константа вдоль характеристик C_- , которые являются прямыми линиями. Между этими двумя простыми волнами величины c и A постоянны. Так как волновое число и амплитуда выражаются через c и A , к ним применимы те же качественные утверждения.

Рассмотрим теперь распространение энергии. Полная энергия системы на единицу длины равна

$$\frac{1}{2}\varphi_t^2 + \frac{1}{2}\varphi_x^2 + V(\varphi) \quad (5.57)$$

и имеет среднее значение

$$k(cW_c + AW_A - W). \quad (5.58)$$

Средний поток энергии определяется из усредненного уравнения сохранения (5.45) в следующем виде:

$$kc(cW_c + AW_A - W) - cA. \quad (5.59)$$

Следовательно, скорость распространения энергии равна

$$\frac{kc(cW_c + AW_A - W) - cA}{k(cW_c + AW_A - W)} = \frac{cG}{(c^2 - 1)AG' + G}. \quad (5.60)$$

Это другая важная скорость. Таким образом, в данном нелинейном случае существуют две характеристические скорости и скорость распространения энергии, причем одну из них мы должны приписать групповой скорости. Иначе говоря, понятие «группа волн», которое обсуждалось в гл. 1, должно быть уточнено, поскольку все три скорости одинаково важны. Возможно, что мы все же можем называть групповой скоростью скорость распространения энергии.

5.4. Уравнение Кортевега — де Фриза

Цель настоящего раздела — определить характеристические скорости уравнений модуляции, которые получаются из уравнения КдФ, записанного в форме

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (5.61)$$

Чтобы получить стационарные решения, сделаем подстановку

$$\xi = x - ct, \quad (5.62)$$

после чего оно приведет к форме

$$u\xi\xi\xi = cu\xi - 6u\xi\xi. \quad (5.63)$$

Принтегрировав его, получим

$$u_{\xi\xi} = B + cu - 3u^2. \quad (5.64)$$

Умножая это уравнение на u_{ξ} и интегрируя, имеем

$$1/2 u_{\xi}^2 = -A + Bu + 1/2 cu^2 - u^3 = f(u), \quad (5.65)$$

где A и B — константы интегрирования.

В гл. 2 мы видели, что в общем случае, когда (5.65) допускает ограниченное решение, полином $f(u)$ имеет три вещественных нуля α, β, γ ($\alpha > \beta > \gamma$) и $\beta < u < \alpha$. Заметим, что уравнение (5.65) содержит три параметра c, A и B , и, следовательно, необходимо еще три закона сохранения для определения их медленного изменения в зависимости от x и t . Сначала установим три независимых уравнения сохранения.

Первое уравнение получается простой перегруппировкой (5.61):

$$u_t + (3u^2 + u_{xx})_x = 0. \quad (5.66)$$

Второе уравнение получается умножением (5.61) на u и перегруппировкой членов:

$$(1/2 u^2)_t + (2u^3 + uu_{xx} - 1/2 u_x^2)_x = 0. \quad (5.67)$$

Третье уравнение сохранения получается умножением (5.61) на $3u^2$ и перегруппировкой членов:

$$(u^3 - 1/2 u_x^2)_t + (9/2 u^4 + 3u^2 u_{xx} + 1/2 u_{xx}^2 + u_x u_t)_x = 0. \quad (5.68)$$

Процесс усреднения упрощается введением функции $W(c, A, B)$:

$$W(c, A, B) = -\oint u_{\xi} du = -\sqrt{2} \oint (-A + Bu + 1/2 cu^2 - u^3)^{1/2} du, \quad (5.69)$$

где интегрирование должно проводиться по полному циклу, например от β до α и затем от α до β . Как и в п. 5.3.2, длина волны и волновое число определяются путем дифференцирования (5.69) по A следующим образом:

$$\lambda = \lambda(c, A, B) = \int_0^{\lambda} d\xi = \oint du/u_{\xi} = (1/\sqrt{2}) \oint du/\sqrt{f(u)} = W_A, \quad (5.70)$$

$$k = k(c, A, B) = 1/[\lambda(c, A, B)] = 1/W_A, \quad \text{или} \quad kW_A = 1. \quad (5.71)$$

Найдем далее средние полевых величин на длине волны, как это было сделано в общей теории в разд. 5.2. Тогда

$$\bar{u} = k \int_0^{\lambda} u d\xi = k \oint u du / u_{\xi} = (k/\sqrt{2}) \oint u du / \sqrt{f(u)} = -kW_B, \quad (5.72)$$

$$\overline{3u^2 + u_{xx}} = \overline{3u^2 + u_{\xi\xi}} = \overline{B + cu} = B - ckW_B, \quad (5.73)$$

$$\overline{1/2 u^2} = k \oint (1/2 u^2 du) / u_{\xi} = -kW_c, \quad (5.74)$$

$$\overline{2u^3 + uu_{xx} - 1/2 u_x^2} = \overline{2u^3 + uu_{\xi\xi} - 1/2 u_{\xi}^2} = \\ = \overline{A + 1/2 cu^2} = A - kcW_c \quad (u_{\xi\xi} \text{ и } u_{\xi}^2 \text{ из (5.64) и (5.65)}), \quad (5.75)$$

$$\overline{u^3 - 1/2 u_x^2} = \overline{u^3 - 1/2 u_{\xi}^2} = \overline{-u_{\xi}^2 - A + Bu + 1/2 cu^2} = \text{(из (5.65))} \\ = kW - A + B(-kW_B) + c(kW_c) = \\ = -k(AW_A + BW_B + cW_c - W), \quad (5.76)$$

так как

$$\overline{u_{\xi}^2} = k \oint u_{\xi}^2 du / u_{\xi} = k \oint u_{\xi} du = -kW \quad \text{и} \quad kW_A = 1, \quad (5.77)$$

и, наконец,

$$\overline{9/2 u^4 + 3u^2 u_{xx} + 1/2 u_x^2 + u_x u_t} = \overline{9/2 u^4 + 3u^2 u_{\xi\xi} + 1/2 u_{\xi}^2 - cu_{\xi}^2} = \\ = \overline{1/2 B^2 + Bcu - cu_{\xi}^2 + 1/2 c^2 u^2} = \text{(} u_{\xi\xi} \text{ из (5.64))} \\ = 1/2 B^2 + Bc(-kW_B) - c(-kW) + c^2(-kW_c) = \\ = 1/2 B^2 + Ac - kc(AW_A + BW_B + cW_c - W). \quad (5.78)$$

Подставляя эти средние в уравнения сохранения, получаем следующие усредненные уравнения сохранения:

$$(kW_B)_t + (ckW_B - B)_x = 0, \quad (5.79)$$

$$(kW_c)_t + (ckW_c - A)_x = 0, \quad (5.80)$$

$$[k(AW_A + BW_B + cB_c - W)]_t + \\ + [ck(AW_A + BW_B + cW_c - W) - 1/2 B^2 - Ac]_x = 0. \quad (5.81)$$

Как и в разд. 5.32, распишем (5.81), сохраняя kW_A , kW_B и kW_c вместе и собирая отдельно члены с производными по A , B , c . В результате получим уравнение

$$k_t + (ck)_x = 0, \quad (5.82)$$

которое является законом сохранения для волнового числа, определенного здесь полностью согласно процедуре усреднения. Уравнение (5.82), выраженное через W_A ($kW_A = 1$),

имеет вид

$$DW_A/Dt - W_A \partial c / \partial x = 0, \quad (5.83)$$

и уравнения (5.79) и (5.80) могут быть записаны как

$$DW_B/Dt - W_A \partial B / \partial x = 0, \quad (5.84)$$

$$DW_c/Dt - W_A \partial A / \partial x = 0, \quad (5.85)$$

где

$$D/Dt \equiv \partial/\partial t + c \partial/\partial x. \quad (5.86)$$

Уравнения (5.83) — (5.85) суть основные уравнения для изучения медленного изменения A , B , c . Эта информация позволит окончательно определить поведение $u = u(\xi)$, где из (5.65) имеем

$$\xi = (1/\sqrt{2}) \int du / [-A + Bu + 1/2 cu^2 - u^3]^{1/2}. \quad (5.87)$$

Хотя уравнения (5.83) — (5.85) кажутся простыми, определять характеристическую скорость из них очень утомительно. Оказывается, легче работать с нулями α , β , γ функции $f(u)$, чем с A , B , c . Из соотношений между корнями и коэффициентами кубических уравнений $f(u) = 0$ имеем

$$\alpha + \beta + \gamma = 1/2 c, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -B, \quad \alpha\beta\gamma = -A. \quad (5.88)$$

В терминах α , β , γ можно записать W как

$$W = -2\sqrt{2} \int_{\beta}^{\alpha} [(\alpha - u)(u - \beta)(u - \gamma)]^{1/2} du, \quad (5.89)$$

так что

$$W_{\alpha} = 2/3 \sqrt{2(\alpha - \gamma)} \{(\beta + \gamma - 2\alpha)E + (\beta - \gamma)K\}, \quad (5.90a)$$

$$W_{\beta} = 2/3 \sqrt{2(\alpha - \gamma)} \{(\alpha + \gamma - 2\beta)E + (\beta - \gamma)K\}, \quad (5.90b)$$

$$W_{\gamma} = 2/3 \sqrt{2(\alpha - \gamma)} \{(\alpha + \beta - 2\gamma)E - 2(\beta - \gamma)K\}, \quad (5.90v)$$

где E и K — полные эллиптические интегралы:

$$E(s) = \int_0^{\pi/2} \Lambda d\theta, \quad K(s) = \int_0^{\pi/2} d\theta/\Lambda, \quad \Lambda = (1 - s^2 \sin^2 \theta)^{1/2}, \quad (5.91)$$

$$\text{и аргумент } s^2 = (\alpha - \beta)/(\alpha - \gamma) < 1. \quad (5.92)$$

При установлении этих соотношений мы использовали следующее:

$$H(s) = \int_0^{\pi/2} \Lambda^3 d\theta = \frac{2(\alpha + \beta - 2\gamma)}{3(\alpha - \gamma)} E(s) - \frac{\beta - \gamma}{3(\alpha - \gamma)} K(s). \quad (5.93)$$

Из (5.90) получаем важное соотношение

$$W_{\alpha} + W_{\beta} + W_{\gamma} = 0. \quad (5.94)$$

Тогда из (5.88) имеем

$$\begin{aligned} d\alpha &= (1/\Delta)(\beta - \gamma)(-dA + \alpha dB + 1/2\alpha^2 dc), \\ d\beta &= (1/\Delta)(\gamma - \alpha)(-dA + \beta dB + 1/2\beta^2 dc), \end{aligned} \quad (5.95)$$

$$\begin{aligned} d\gamma &= (1/\Delta)(\alpha - \beta)(-dA + \gamma dB + 1/2\gamma^2 dc), \\ \text{где } \Delta &= (\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\alpha - \gamma). \end{aligned} \quad (5.96)$$

Эти соотношения определяют частные производные α , β , γ по c , A , B . Далее мы можем выразить частные производные от W по c , A , B через частные производные от W по α , β , γ :

$$\begin{aligned} W_A &= 2\sqrt{2/(\alpha - \gamma)} K, \\ W_B &= -2\sqrt{2/(\alpha - \gamma)} \{\gamma K + (\alpha - \gamma) E\}, \\ W_c &= -1/3\sqrt{2/(\alpha - \gamma)} [\{\gamma(\alpha + \beta + 2\gamma) - \alpha\beta\} K + \\ &\quad + 2(\alpha - \gamma)(\alpha + \beta + \gamma) E], \end{aligned} \quad (5.97)$$

где для удобства записи мы опустили аргумент s^2 в функциях E и K . Обозначая теперь точкой производную D/Dt , применяя этот оператор к (5.97) и используя

$$\dot{E} = 1/2[(s^2)^*/s^2](E - K), \quad (5.98a)$$

$$\dot{K} = 1/2[(s^2)^*/s^2][E/(1 - s^2) - K], \quad (5.98b)$$

$$\frac{(s^2)^*}{s^2} = \frac{(\beta - \gamma)\dot{\alpha} - (\alpha - \gamma)\dot{\beta} + (\alpha - \beta)\dot{\gamma}}{2(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}, \quad (5.99)$$

имеем

$$\begin{aligned} \dot{W}_A &= \sqrt{2/(\alpha - \gamma)} \left[\frac{E - K}{\alpha - \beta} \dot{\alpha} + \frac{(\beta - \gamma)K - (\alpha - \gamma)E}{(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)} \dot{\beta} + \frac{E}{\beta - \gamma} \dot{\gamma} \right], \\ \dot{W}_B &= -\sqrt{2/(\alpha - \gamma)} \left[\frac{\alpha E - \beta K}{\alpha - \beta} \dot{\alpha} + \frac{\alpha(\beta - \gamma)K - \beta(\alpha - \gamma)E}{(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)} \dot{\beta} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\alpha - \gamma)K + \gamma E}{\beta - \gamma} \dot{\gamma} \right], \end{aligned} \quad (5.100a)$$

$$\begin{aligned} \dot{W}_c &= -\sqrt{2/(\alpha - \gamma)} \left\{ \frac{\dot{\alpha}}{2(\alpha - \beta)} [-(\alpha\beta + \beta\gamma - \gamma\alpha)K + \right. \\ &\quad \left. + (\beta\gamma - \alpha(\beta + \gamma - 2\alpha))E] + \frac{\dot{\beta}}{2(\alpha - \beta)} [(\alpha\beta + \alpha\gamma - \beta\gamma)K - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma}(\alpha\gamma - \beta(\alpha + \gamma - 2\beta))E] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\dot{\gamma}}{2(\beta - \gamma)} [2\gamma(\beta - \gamma)K + (\alpha\beta - \gamma(\alpha + \beta - 2\gamma))E] \right\}. \end{aligned} \quad (5.100b)$$

Запишем усредненные уравнения сохранения через производные от α, β, γ :

$$(W_\gamma - W_\beta) \dot{\alpha} + (W_\alpha - W_\gamma) \dot{\beta} + (W_\beta - W_\alpha) \dot{\gamma} = 4W_A \Delta (\alpha_x + \beta_x + \gamma_x), \quad (5.101)$$

$$\begin{aligned} & \{(\gamma - 2\beta) W_\gamma - (\beta - 2\gamma) W_\beta\} \dot{\alpha} + \{(\alpha - 2\gamma) W_\alpha - (\gamma - 2\alpha) W_\gamma\} \dot{\beta} + \\ & + \{(\beta - 2\alpha) W_\beta - (\alpha - 2\beta) W_\alpha\} \dot{\gamma} = -2W_A \Delta \{(\beta + \gamma) \alpha_x + \\ & + (\alpha + \gamma) \beta_x + (\alpha + \beta) \gamma_x\}, \end{aligned} \quad (5.102)$$

$$\begin{aligned} & \{(3\alpha\beta - 3\alpha\gamma + \beta\gamma) W_\gamma - (3\alpha\gamma - 3\alpha\beta + \beta\gamma) W_\beta\} \dot{\alpha} + \\ & + \{(3\beta\gamma - 3\beta\alpha + \gamma\alpha) W_\alpha - (3\beta\alpha - 3\beta\gamma + \gamma\alpha) W_\gamma\} \dot{\beta} + \\ & + \{(3\gamma\alpha - 3\gamma\beta + \alpha\beta) W_\beta - (3\gamma\beta - 3\gamma\alpha + \alpha\beta) W_\alpha\} \dot{\gamma} = \\ & = 4W_A \Delta \{\beta\gamma\alpha_x + \alpha\gamma\beta_x + \alpha\beta\gamma_x\}. \end{aligned} \quad (5.103)$$

Заметим, что эта система уравнений инвариантна относительно циклической перестановки α, β, γ . Чтобы привести эти уравнения к характеристической форме, умножим (5.101) на λ , (5.102) на μ и прибавим их к (5.103). Если выбрать λ и μ такими, что коэффициенты при $\dot{\alpha}$ и α_x равны нулю, то

$$\lambda = \alpha\beta + \gamma\alpha - 3\beta\gamma \quad \text{и} \quad \mu = 2\alpha. \quad (5.104)$$

При этих значениях λ и μ мы находим, что оба коэффициента при β_x и γ_x равны $-4W_A \Delta (\alpha^2 - \alpha\beta - \alpha\gamma + \beta\gamma)$, в то время как коэффициенты при $\dot{\beta}$ и $\dot{\gamma}$ оба равны выражению $2(\alpha^2 - \alpha\beta - \alpha\gamma + \beta\gamma)(W_\gamma - W_\beta)$, где для упрощения использованы соотношения (5.104). Таким образом, наши уравнения сводятся к уравнению

$$\dot{\beta} + \dot{\gamma} = [2W_A \Delta / (W_\beta - W_\gamma)] (\beta_x + \gamma_x). \quad (5.105)$$

Учитывая инвариантность относительно циклической перестановки α, β, γ , получаем два других уравнения при помощи этой перестановки. Из (5.105) и двух аналогичных выражений находим следующие характеристические скорости:

$$c_1 + [2W_A \Delta / (W_\beta - W_\gamma)] = c_1 + 4aK / (K - E) = 0, \quad (5.106a)$$

$$c_2 + [2W_A \Delta / (W_\gamma - W_\alpha)] = c_2 + 4aK (1 - s^2) / [E - (1 - s^2)K] = 0, \quad (5.106б)$$

$$c_3 + [2W_A \Delta / (W_\alpha - W_\beta)] = c_3 - [4a(1 - s^2)/s^2] K/E = 0, \quad (5.106в)$$

где $a = (\alpha - \beta)/2$. Соответствующими соотношениями совместности вдоль характеристик являются $\beta + \gamma = \text{const}$, $\gamma + \alpha = \text{const}$, $\alpha + \beta = \text{const}$. Волновое число k выражается в виде $k = 1/W_A = \sqrt{a}/2sK$, так что можно написать

$$s = s(a/k^2), \quad (5.107)$$

тогда три скорости распространения записываются как

$$c_i = aF_i(a/k^2), \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.108)$$

где функция F_i зависит от a и k через комбинацию a/k^2 . Следовательно, предел при $a/k^2 \rightarrow 0$ отвечает линейному случаю и должен воспроизводить результаты для линеаризованного уравнения КдФ

$$u_t + u_{xxx} = 0. \quad (5.109)$$

Фурье-компонента, соответствующая

$$u \sim \exp \{2\pi i (kx - \omega t)\}, \quad (5.110)$$

определяет следующее соотношение для (5.109):

$$\omega = -4\pi^2 k^3. \quad (5.111)$$

В пределе $a/k^2 \rightarrow 0$ скорости распространения (5.106) сводятся к следующим:

$$-3(2\pi k)^2, \quad -3(2\pi k)^2, \quad 0. \quad (5.112)$$

Ясно, что первые две скорости в (5.112) равны групповой скорости, которая дается уравнением (5.111). Появление в (5.112) третьей скорости, а именно 0, может быть объяснено следующим образом. Решение уравнения (5.109) типа стационарной волны имеет вид

$$u(x, t) = b + a \sin \{2\pi kx - (2\pi k)^3 t\}, \quad (5.113)$$

и осредненные уравнения в линейной задаче дают $\partial b / \partial t = 0$, что соответствует нулевой скорости в (5.112). Однако мы должны помнить, что в линейной теории решение обычно определяется с точностью до несущественной аддитивной постоянной.

5.5. Групповая скорость: динамическая трактовка

Рассмотрим общую континуальную систему. Пусть η_i , $i = 1, 2, \dots, n$, — локальные переменные, или характерные параметры, определяющие состояние системы, и L — лагранжева плотность, т. е. лагранжиан, отнесенный к единице объема. Рассмотрим систему, где L — функция от η_i и их первых производных:

$$\dot{\eta}_i \equiv (\partial/\partial t) \eta_i, \quad \eta_i^a \equiv (\partial/\partial x_a) \eta_i, \quad (5.114)$$

не содержащая независимых переменных, т. е. пространственных координат (x_1, x_2, x_3) и временной координаты t . Таким образом, имеем

$$L = L(\eta_i, \dot{\eta}_i, \eta_i^a). \quad (5.115)$$

Принцип Гамильтона определяет временную эволюцию системы и заключается в том, что «интеграл по времени от лагранжиана стационарен», что в обычной математической записи выглядит так:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V L dV = 0 \quad (5.116)$$

для любых вариаций $\delta \eta_i$ функций $\eta_i(x_\alpha, t)$, которые обращаются в нуль в начале $t = t_1$ и в конце $t = t_2$ произвольного интервала времени, а также на границе произвольного объема V трехмерного пространства (x_1, x_2, x_3) , по которому ведется интегрирование в (5.116). Из (5.116) следуют уравнения Лагранжа

$$(\partial/\partial t)(\partial L/\partial \dot{\eta}_i) + \sum_{\alpha=1}^3 (\partial/\partial x_\alpha)(\partial L/\partial \eta_i^\alpha) - \partial L/\partial \eta_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.117)$$

Полная плотность энергии системы в точке (x_α, t) дается формулой (Гольдстейн [1950])

$$E = \sum_{i=1}^n \dot{\eta}_i (\partial L/\partial \dot{\eta}_i) - L, \quad (5.118)$$

откуда в силу (5.117) имеем

$$\partial E/\partial t = - \sum_{\alpha=1}^3 \partial I_\alpha/\partial x_\alpha, \quad (5.119)$$

где
$$I_\alpha = \sum_{i=1}^n \dot{\eta}_i (\partial L/\partial \eta_i^\alpha). \quad (5.120)$$

Из (5.119) ясно, что вектор $\mathbf{I}(I_1, I_2, I_3)$ представляет собой поток энергии. Ясно также, что энергия прямоугольного элемента с гранями, параллельными координатным плоскостям, изменяется со скоростью, равной разности потоков энергии через противоположные грани элемента.

Для периодических плоских волн мы можем определить скорость распространения u_α в виде

$$u_\alpha = \frac{\langle I_\alpha \rangle}{\langle E \rangle} = \left\langle \sum_{i=1}^n \dot{\eta}_i \frac{\partial L}{\partial \eta_i^\alpha} \right\rangle / \left\langle \sum_{i=1}^n \dot{\eta}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} - L \right\rangle, \quad (5.121)$$

где $\langle E \rangle$ обозначает среднее от энергии, полученное осреднением по целому числу длин волн или периодов. В терминах u_α усредненное уравнение (5.119) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle E \rangle + \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \langle E \rangle u_\alpha = 0. \quad (5.122)$$

Если нас интересуют только плоские периодические волны, мы можем использовать принцип Гамильтона в слегка измененной форме.

Плоская периодическая волна удовлетворяет условию

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V L dV = 0 \quad (5.123)$$

для всех вариаций $\delta \eta_i$, которые периодичны с теми же самыми частотой и волновым числом, как и сама η_i , при условии, что $t_2 - t_1$ равно периоду, умноженному на целое число, и V — прямоугольный объем, четыре грани которого перпендикулярны фронту волны, а длина ребра составляет целое число длин волн.

Доказательство этого принципа, как показано ниже, более или менее очевидно. Имеем

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V L dV &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V dV \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \eta_i} \delta \eta_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} \delta \dot{\eta}_i + \right. \\ &+ \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \eta_i^\alpha} \delta \eta_i^\alpha \Big) = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V dV \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial L}{\partial \eta_i} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} \right) - \right. \\ &- \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial \eta_i^\alpha} \right) \Big\} \delta \eta_i + \int_V dV \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} \delta \eta_i \right) + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \eta_i^\alpha} \delta \eta_i \right) dV = 0. \end{aligned}$$

Первый член равен нулю в силу уравнений Лагранжа (5.117), второй член обращается в нуль при интегрировании по t и использовании того, что $t_2 - t_1$ равно целому числу периодов, и третий член равен нулю в силу использования теоремы Гаусса и того факта, что интегралы по противоположным граням объема V , разделенным целым числом длин волны, обращаются в нуль и что нормали к поверхностям интегрирования внешние.

В линейном случае, т. е. в случае инфинитезимальных амплитуд, можно показать, что $\langle L \rangle = 0$. Для начала рассмотрим классический динамический случай. Здесь L — разность кинетической и потенциальной энергий, так что $\langle L \rangle$ — разность средней кинетической и средней потенциальной энергий — равна нулю.

В общей системе, подчиняющейся принципу Гамильтона, для волн инфинитезимальной амплитуды L — однородная функция второй степени по всем переменным, являющимся ее аргументами. Следовательно, если заменить каждое η_i на

$(1 + \epsilon)\eta^i$, то лагранжиан L превратится в $(1 + \epsilon)^2 L$ и указанный выше вариационный принцип примет вид

$$0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V L dV = (1 + \epsilon)^2 \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V L dV,$$

$$\text{и, следовательно, } \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V L dV = 0,$$

что означает $\langle L \rangle = 0$. В случае нелинейной волны L — не обязательно однородная функция своих аргументов, и, следовательно, для такой волны в общем случае $\langle L \rangle \neq 0$. Далее посмотрим, можно ли выразить групповую скорость u_α в виде

$$u_\alpha = \partial\omega / \partial k_\alpha \quad (5.124)$$

в случае плоских волн конечной амплитуды, как это было для волн бесконечно малой амплитуды. В гл. 2 мы видели, что в случае нелинейных волн ω есть функция не только волнового числа \mathbf{k} , но также амплитуды и других параметров, которые были названы Уиземом [1965] *псевдочастотами*. Однако здесь мы не будем их рассматривать. Таким образом, выражение (5.124) может иметь смысл производной *при постоянных компонентах \mathbf{k} , отличных от k_α , а также некоторой меры амплитуды*.

Уизем [1965] показал, что (5.124) выполняется, если две компоненты вектора \mathbf{k} , отличные от k_α , и $\langle L \rangle / \omega$ остаются фиксированными, т. е.

$$u_\alpha = (\partial\omega / \partial k_\alpha)_{\langle L \rangle / \omega}. \quad (5.125)$$

Заметим, что классический результат для линейных волн — частный случай соотношения (5.125), так как для таких волн $\langle L \rangle / \omega = 0$. Докажем (5.125) для общего случая. Рассмотрим плоские периодические волны в форме

$$\eta_i = f_i \left(\omega t - \sum_{\alpha=1}^3 k_\alpha x_\alpha \right), \quad (5.126)$$

где все функции $f_i(\xi)$ периодические по $\xi = \omega t - \sum_{\alpha=1}^3 k_\alpha x_\alpha$

с периодом P . Без ограничения общности положим $P = 1$, так как это просто означает нормировку переменной ξ . Из (5.126) имеем

$$\eta_i = f_i(\xi), \quad \dot{\eta}_i = f'_i(\xi) \omega, \quad \eta_i^\alpha = -f'_i(\xi) k_\alpha. \quad (5.127)$$

Рассмотрим произвольное возмущение, при котором, вообще говоря, частота и волновое число изменяются:

$$\eta_i + \delta\eta_i = F_i \left(\Omega t - \sum_{\alpha=1}^3 K_{\alpha} x_{\alpha} \right), \quad (5.128)$$

$$\Omega = \omega + \delta\omega, \quad K_{\alpha} = k_{\alpha} + \delta k_{\alpha}, \quad F(\xi) = f_i(\xi) + \delta f_i(\xi), \quad (5.129)$$

где $\delta f_i(\xi)$ имеет период 1 точно так же, как и функция $f_i(\xi)$. Итак, имеем

$$\begin{aligned} \delta \langle L \rangle &= \delta \int_0^1 L \{ f_i(\xi), \omega f'_i(\xi), -k_{\alpha} f'_i(\xi) \} d\xi = \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \eta_i} \delta f_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} \omega \delta f'_i - \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \eta_i^{\alpha}} k_{\alpha} \delta f'_i \right) d\xi + \\ &+ \left(\int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} f'_i d\xi \right) \delta\omega - \sum_{\alpha=1}^3 \left(\int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \eta_i^{\alpha}} f'_i d\xi \right) \delta k_{\alpha}. \end{aligned} \quad (5.130)$$

Заметим, что первый член в правой части (5.130) дает вклад в общую вариацию, происходящий от варьирования f_i при фиксированных ω и k_{α} , и должен обращаться в нуль в силу принципа Гамильтона для плоских периодических волн для вариаций η_i при постоянных частоте и волновом числе, в то время как второй и третий члены, будучи помноженными на ω , могут быть выражены через средние значения, которые появляются в (5.121). Таким образом,

$$\begin{aligned} \omega \delta \langle L \rangle &= \left(\int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} \dot{\eta}_i d\xi \right) \delta\omega - \sum_{\alpha=1}^3 \left(\int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \eta_i^{\alpha}} \dot{\eta}_i d\xi \right) \delta k_{\alpha} = \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \eta_i} \dot{\eta}_i \right\rangle \delta\omega - \sum_{\alpha=1}^3 \left\langle \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \eta_i^{\alpha}} \dot{\eta}_i \right\rangle \delta k_{\alpha}. \end{aligned} \quad (5.131)$$

Если $\langle L \rangle / \omega = \text{const}$, то

$$\delta \langle L \rangle / \omega - \langle L \rangle \delta\omega / \omega^2 = 0, \quad \text{или} \quad \omega \delta \langle L \rangle = \langle L \rangle \delta\omega. \quad (5.132)$$

Подставляя (5.132) в (5.131), имеем

$$\begin{aligned} \langle L \rangle \delta\omega &= \left\langle \sum_{i=1}^n \dot{\eta}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} \right\rangle \delta\omega - \sum_{\alpha=1}^3 \left\langle \sum_{i=1}^n \dot{\eta}_i \frac{\partial L}{\partial \eta_i^{\alpha}} \right\rangle \delta k_{\alpha}, \\ \text{или} \quad \delta\omega &= \sum_{\alpha=1}^3 \left\langle \sum_{i=1}^n \dot{\eta}_i \frac{\partial L}{\partial \eta_i^{\alpha}} \right\rangle \delta k_{\alpha} / \left[\left\langle \sum_{i=1}^n \dot{\eta}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} \right\rangle - \langle L \rangle \right], \end{aligned}$$

откуда с помощью (5.121) следует (5.125).

Величина $\langle L \rangle / \omega$, которая сохраняется фиксированной в (5.125), является интегралом лагранжевой плотности по времени в пределах одного периода. Это величина, которая остается стационарной, когда мы переходим от периодического решения η_i к близкому $\eta_i + \delta\eta_i$, периодическому с теми же самыми частотой и волновым числом, что и η_i , но в общем не являющемуся решением. Это объясняет неожиданное обстоятельство в последнем доказательстве, а именно то, что функции (5.128) с возмущенными частотами и волновыми числами, являющиеся решениями уравнений движения, не использовались в доказательстве. Это не было необходимо, потому что $\langle L \rangle / \omega$ было бы таким же, как и для близких функций, которые не являются решениями, т. е. мы могли бы доказать теорему для более общих возмущений $\eta_i + \delta\eta_i$, $\omega + \delta\omega$, $k_\alpha + \delta k_\alpha$, не являющихся решениями уравнений движения.

Формула (5.125) была получена Уиземом [1965]. Этот результат следует считать выдающимся, поскольку он переносит обычную формулу для групповой скорости линейных волн на случай нелинейных волн, при условии что псевдочастота фиксирована. Заметим также, что лагранжева формулировка позволяет нам естественным и изящным способом перейти к трехмерному случаю.

ЛИТЕРАТУРА

Гольдштейн (Goldstein H.)

[1950] *Classical mechanics*. — Reading, Mass.: Addison-Wesley. [Имеется перевод: Гольдштейн Г. Классическая механика. — М.: Наука, 1975.]

Лайтхилл (Lighthill M. J.)

[1965] Group velocity. — *J. Inst. Math. and its Appl.*, v. 1, p. 1—28.

Уизем (Whitham G. B.)

[1965a] Nonlinear dispersive waves. — *Proc. Roy. Soc.*, v. A283, p. 238—261.

[1965b] A general approach to linear and nonlinear dispersive waves using Lagrangian. — *J. Fluid Mech.*, v. 22, p. 273—283.

[1974] *Linear and nonlinear waves*. — New York: Wiley. [Имеется перевод: Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.]

Хейз (Hayes W. D.)

[1973] Group velocity and nonlinear dispersive wave propagation. — *Proc. Roy. Soc.*, v. A332, p. 199—221.

К русскому переводу	
Предисловие к английскому изданию	
Предисловие	
1. Линейные волны	
1.1. Введение	1
1.2. Линейное волновое уравнение: волновая терминология	12
1.3. Общее линейное уравнение; дисперсионное соотношение	17
1.4. Диспергирующие волны; групповая скорость	16
1.5. Общее решение линейного волнового уравнения	20
1.6. Распространение энергии в диспергирующей волне	22
1.7. Важное кинематическое соотношение	23
Приложение 1. Метод перевала	29
2. Некоторые нелинейные уравнения эволюции (стационарное решение)	
2.1. Введение	29
2.2. Эффект нелинейности	30
2.3. Диссипирующие волны	37
2.4. Диспергирующие волны	40
2.5. Уединенные волны: солитоны	46
2.6. Некоторые уравнения эволюции, порождающие солитоны	46
Приложение IIA. Уравнения, описывающие течение газа в трубах и волны на мелкой воде переменной глубины	55
Приложение IIB. Метод сведения к эталонному уравнению	59
3. Взаимодействие солитонов	
3.1. Введение	68
3.2. Свойства уравнения Шредингера	68
3.3. Интегралы уравнения и связь между уравнениями КдФ и Шредингера	72
3.4. Независимость от времени спектра уравнения Шредингера, определение параметров рассеяния	73
3.5. Обратная задача рассеяния	76
3.6. Солитонные решения уравнения КдФ	78
3.7. Взаимодействие солитонов	89
3.8. Непрерывный спектр оператора Шредингера	93
4. Общее уравнение эволюции	
4.1. Введение	95
4.2. Определения	98
4.3. Решения типа уединенной волны общего уравнения эволюции	103
4.4. Применение общей теории к уравнению КдФ	107
4.5. Собственные скорости общего решения уравнения КдФ	111
5. Групповая скорость; нелинейные волны	
5.1. Введение	114
5.2. Процедура усреднения	115
5.3. Примеры	118
5.4. Уравнение Кортевега — де Фриза	124
5.5. Групповая скорость: динамическая трактовка	130